https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.06.036
УДК 539.3

**О.Я. Григоренко**[1], https://orcid.org/0000-0002-4109-2672
**М.Ю. Борисенко**[1], https://orcid.org/0000-0002-7287-0975
**С.О.Сперкач**[2], https://orcid.org/0000-0003-3168-6300
**А.Д. Безугла**[2], https://orcid.org/0000-0001-8083-3210
**Е.О. Міхрін**[3], https://orcid.org/0000-0001-7405-6902

[1] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
[2] Технічний центр НАН України, Київ
[3] Миколаївський муніципальний колегіум ім. В.Д. Чайки
E-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com, mechanics530@gmail.com,
svetlana@nasu.kiev.ua, bezuglaya.anna24@gmail.com, emihrin50@gmail.com

# Чисельний аналіз частот вільних коливань п'ятикутних пластин

*Представлено членом-кореспондентом НАН України О.Я Григоренком*

*Розглянуто вільні коливання ізотропних п'ятикутних пластин різної товщини з вільними краями на основі двох різних підходів. Поширено підхід Релея—Рітца на розрахунок частот вільних коливань п'ятикутних пластин. Методом скінченних елементів розраховані частоти та форми вільних коливань пластин вказаного класу. Проведено порівняння розрахованих частот та встановлено точність розрахунків двома методами. Проведено порівняння отриманих форм коливань методом скінченних елементів з формами коливань, отриманими чисельно та експериментально іншими авторами.*

***Ключові слова:*** *п'ятикутна пластина, частота вільних коливань, метод скінченних елементів, метод Релея—Рітца, FEMAP.*

Пластини різної форми є поширеними елементами тонкостінних конструкцій інженерних споруд та сучасних будівель, авто- та авіапромисловості, кораблів, космічних апаратів тощо із застосуванням сучасних технологій. Важливим аспектом у забезпеченні надійності таких пластинчастих конструкцій є визначення частот і форм вільних коливань з високою точністю з урахуванням властивостей матеріалу і граничних умов. Це актуальна проблема прикладної математики та механіки.

Питання про вільні коливання пластин розглядаються дуже широко в рамках класичної теорії з використанням різноманітних методів [1—4]. В [5] представлена задача про

Цитування: Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Сперкач С.О., Безугла А.Д., Міхрін Е.О. Чисельний аналіз частот вільних коливань п'ятикутних пластин. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2022. № 6. С. 36—45. https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.06.036

коливання квадратної пластини, проаналізовано теоретичні та експериментальні дані. Дослідження коливань вільних полігональних і заокруглених полігональних пластин за допомогою покращеного методу Рітца проведені в [6].

Одним із сучасних методів дослідження частот і форм вільних коливань є метод скінченних елементів (МСЕ). Він складає основу багатьох програм для інженерного розрахунку, наприклад, програми FEMAP з розв'язувачем NX Nastran. В [7] МСЕ, який реалізовано в FEMAP, визначені частоти і форми вільних коливань тонких ізотропних трикутних пластин з отвором у центрі при різних варіаціях жорсткого закріплення на краях та отворі. Частоти та форми вільних коливань тонкої жорстко закріпленої квадратної пластини на основі МСЕ і методом Релея—Рітца визначені в [8]. Трикутна, чотирикутна і п'ятикутна пластини з різними фізико-механічними характеристиками з вільними краями досліджується авторами в [9].

Основною перевіркою будь-якого з результатів розрахунків є фізичний експеримент, чисельний аналіз представляє лише моделювання реальної конструкції і від того наскільки вдала модель і математичний апарат, який реалізує цю модель, залежить відповідність результатам експериментальної перевірки. Існують різні експериментальні методи дослідження частот та форм вільних коливань пластин [10—12].

Теоретичні дослідження вільних коливань пов'язані зі складністю реалізації математичної моделі та необхідністю розв'язання складної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних із змінними коефіцієнтами, при розв'язанні якої спостерігається нестійкість розрахунку, втрата необхідного порядку даних обчислень. Визначення частот вільних коливань п'ятикутних пластин пов'язане з проблемами обчислювального характеру та необхідністю переходу до неортогональної системи координат. Тому є необхідність застосування чисельних методів.

Мета даної роботи — поширення підходу для визначення частот вільних коливань ізотропних квадратних пластин методом Релея—Рітца [8] на розрахунок частот вільних коливань ізотропних п'ятикутних пластин різної товщини з вільними краями та поширення МСЕ до розв'язування задачі вказаного класу. Для розрахунку частот за формулою, отриманою методом Релея—Рітца, необхідно визначити коефіцієнти форм коливань та граничних умов за допомогою додаткового розрахунку МСЕ. Тому у цьому випадку застосовуються обидва методи.

**Основні співвідношення.** Розрахунок частот вільних коливань ізотропної пластини сталої товщини $h$ в ортогональній криволінійній системі координат можна здійснити методом Релея—Рітца, використовуючи при наближеному визначенні форм вільних коливань балочні функції, що описують прогини балки з вільними кінцями:

$$w_{m_1 m_2} = c_{m_1 m_2} F_{m_1}(x_1) F_{m_2}(x_2). \tag{1}$$

За допомогою формули Релея—Рітца [13] отримаємо в першому наближені:

$$\omega = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}\left(\frac{A_m^4}{a_1^4} + \frac{A_n^4}{a_2^4} + \frac{2}{a_1^2 a_2^2}[\nu B_m B_n + (1-\nu) C_m C_n]\right)}, \tag{2}$$

де

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \tag{3}$$

$$A_m = \begin{cases} 0 & (m=0), \\ 1,506 & (m=1), \\ m+0,5 & (m \geqslant 2); \end{cases} \quad B_m = \begin{cases} 0 & (m=0), \\ 1,248 & (m=1), \\ A_m\left(A_m - \dfrac{2}{\pi}\right) & (m \geqslant 2); \end{cases} \quad C_m = \begin{cases} \dfrac{12}{\pi^2} & (m=0), \\ 5,017 & (m=1), \\ A_m\left(A_m + \dfrac{6}{\pi}\right) & (m \geqslant 2). \end{cases} \tag{4}$$

Відмітимо, що за формулою (2) визначають циклічну частоту.

Оскільки пластина квадратна, то

$$\begin{aligned} &a_1 = a_2 = a; \\ &A_m = A_n = A; \\ &B_m = B_n = B; \\ &C_m = C_n = C. \end{aligned} \tag{5}$$

Підставляємо (3) і (5) в (2) та виконуємо деякі математичні дії:

$$\omega = \frac{h}{a^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho(1-v^2)}} \cdot \left[ \frac{\pi^2}{\sqrt{6}} \sqrt{A^4 + \nu B^2 + (1-\nu)C^2} \right]. \tag{6}$$

В результаті отримуємо зведену форму запису формули (2) розрахунку власних частот методом Релея—Рітца, особливістю якої є розділення величин на коефіцієнти. Введемо наступні позначення:

$$G = \frac{h}{a^2}; \quad M = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}; \quad F = \frac{\pi^2}{\sqrt{6}} \sqrt{A^4 + \nu B^2 + (1-\nu) \quad ^2}, \tag{7}$$

де $G$ — коефіцієнт геометрії; $M$ — коефіцієнт матеріалу; $F$ — коефіцієнт форми коливань та граничних умов.

Підставимо (7) в (6). Маємо:

$$f = G\,M\,F = \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-v^2)}} F\,. \tag{8}$$

Отриману формулу будемо називати зведеною формулою (ЗФ) (8). Її застосування було поширено на розрахунок частот вільних коливань трикутних пластин з вільними краями [14] та квадратних пластин з жорстко закріпленими краями [8].

Коефіцієнт форми коливань та граничних умов розраховуємо за формулою

$$F_i = \frac{f_i^{\text{МСЕ}}}{h} a^2 \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}}\,, \tag{9}$$

де $f_i^{\text{МСЕ}}$ — попередньо обчислені частоти цієї самої пластини на FEMAP.

При розрахунку МСЕ динамічних процесів рівняння руху механічної системи зі скінченною кількістю ступенів вільності за відсутності зовнішніх сил описується системою рівнянь Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0, \quad j=1,2,...,s, \tag{10}$$

де $L=T-U$ . Використовуючи дискретну форму функціоналів кінетичної енергії та енергії деформації відповідно

$$T=\frac{1}{2}\dot{\vec{\Phi}}_i^T\mathbf{M}_i\dot{\vec{\Phi}}_i, \quad U=\frac{1}{2}\dot{\vec{\Phi}}_i^T\mathbf{K}_i\dot{\vec{\Phi}}_i,$$

де $\mathbf{K}_i$ та $\mathbf{M}_i$ — матриця жорсткості та матриця мас $i$-го скінченного елемента відповідно; $\vec{\Phi}_i$ — вектор вузлових переміщень $i$-го елемента, з рівняння Лагранжа (10) отримаємо наступні рівняння руху за відсутності демпфування:

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j+\mathbf{M}\ddot{\vec{\Phi}}_j=0. \tag{11}$$

Тут $\mathbf{K}$ та $\mathbf{M}$ — матриця жорсткості та матриця мас механічної системи відповідно; $\vec{\Phi}_j$ — вектор переміщень вузлів системи, що відповідає $j$-му ступеню вільності і відтворює $j$-ту форму коливань.

При вільних коливаннях механічної системи всі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу:

$$\vec{\Phi}_j(t)=\vec{\Phi}_j\sin\omega_j t\ . \tag{12}$$

Після підстановки функцій (12) в рівняння руху (11) визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j-\omega_j^2\mathbf{M}\vec{\Phi}_j=0, \quad j=1,2,...,s\ , \tag{13}$$

де $\omega_j$ — пульсація або частота гармонічних коливань.

NX Nastran для визначення власних форм і частот коливань у випадку, коли дисипація енергії і демпфування не враховується, використовується, як основний, метод Ланцоша, що вимагає менших ресурсів у порівнянні з іншими методами та дозволяє визначати $n$ -ну кількість необхідних власних значень і форм з похибкою $\left\|\vec{\Phi}_j-\omega_j^2\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\vec{\Phi}_j\right\|/\left\|\vec{\Phi}_j\right\|\leqslant 10^{-7}$.

**Результати чисельних розрахунків.** Для обчислення коефіцієнтів форм коливань і граничних умов зведеної формули (8) розраховуємо частоти МСЕ алюмінієвої п'ятикутної пластини з вільними краями з параметрами: сторона пластини $a=0{,}24$ м, товщина $h=0{,}004$ м, $h/a=1/60$, модуль Юнга $E$ = 71 ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0{,}33$, густина $\rho$ = 2710 кг/м$^3$, а потім перші десять коефіцієнтів форм коливань і граничних умов за формулою (9). Отри-

Таблиця 1. **Уточнені коефіцієнти за формулою (9) при $h/a$ = 1/60**

| $i$ | $F_i$ | $i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,425419 | 6 | 1,455596 |
| 2 | 0,425711 | 7 | 1,455809 |
| 3 | 0,724054 | 8 | 1,975877 |
| 4 | 1,007285 | 9 | 1,976727 |
| 5 | 1,007445 | 10 | 2,346057 |

Таблиця 2. **Перші десять частот вільних коливань п'ятикутної пластини, розраховані двома методами**

| Form | 1/240 | | ε, % | 1/120 | | ε, % | 1/60 | | ε, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ЗФ (8) | МСЕ | | ЗФ (8) | МСЕ | | ЗФ (8) | МСЕ | |
| 1 | 40,05 | 40,28 | 0,57 | 80,10 | 80,28 | 0,22 | 160,19 | 160,19 | 0,00 |
| 2 | 40,08 | 40,35 | 0,67 | 80,15 | 80,31 | 0,20 | 160,30 | 160,30 | 0,00 |
| 3 | 68,16 | 68,43 | 0,39 | 136,32 | 136,57 | 0,18 | 272,64 | 272,64 | 0,00 |
| 4 | 94,82 | 95,38 | 0,59 | 189,64 | 190,20 | 0,29 | 379,29 | 379,29 | 0,00 |
| 5 | 94,84 | 95,61 | 0,81 | 189,68 | 190,32 | 0,34 | 379,35 | 379,35 | 0,00 |
| 6 | 137,02 | 137,84 | 0,59 | 274,05 | 275,01 | 0,35 | 548,10 | 548,10 | 0,00 |
| 7 | 137,05 | 137,95 | 0,65 | 274,09 | 275,04 | 0,35 | 548,18 | 548,18 | 0,00 |
| 8 | 186,00 | 187,45 | 0,77 | 372,00 | 373,73 | 0,46 | 744,01 | 744,01 | 0,00 |
| 9 | 186,08 | 187,50 | 0,76 | 372,16 | 373,75 | 0,43 | 744,33 | 744,33 | 0,00 |
| 10 | 220,85 | 222,62 | 0,80 | 441,70 | 443,94 | 0,50 | 883,40 | 883,40 | 0,00 |
| **Max** | | | **0,81** | | | **0,50** | | | **0,00** |

| Form | 1/30 | | ε, % | 1/20 | | ε, % | 1/15 | | ε, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ЗФ (8) | МСЕ | | ЗФ (8) | МСЕ | | ЗФ (8) | МСЕ | |
| 1 | 320,38 | 318,97 | 0,44 | 480,57 | 476,00 | 0,96 | 640,76 | 630,98 | 1,55 |
| 2 | 320,60 | 318,98 | 0,51 | 480,90 | 476,02 | 1,03 | 641,20 | 631,00 | 1,62 |
| 3 | 545,28 | 544,28 | 0,18 | 817,92 | 813,47 | 0,55 | 1090,56 | 1079,20 | 1,05 |
| 4 | 758,58 | 753,52 | 0,67 | 1137,87 | 1120,67 | 1,53 | 1517,16 | 1479,06 | 2,58 |
| 5 | 758,70 | 753,64 | 0,67 | 1138,05 | 1120,82 | 1,54 | 1517,40 | 1479,24 | 2,58 |
| 6 | 1096,20 | 1087,64 | 0,79 | 1644,30 | 1613,68 | 1,90 | 2192,40 | 2122,86 | 3,28 |
| 7 | 1096,36 | 1087,66 | 0,80 | 1644,54 | 1613,72 | 1,91 | 2192,72 | 2122,90 | 3,29 |
| 8 | 1488,02 | 1477,17 | 0,73 | 2232,03 | 2189,09 | 1,96 | 2976,04 | 2873,76 | 3,56 |
| 9 | 1488,66 | 1444,36 | 3,07 | 2232,99 | 2189,37 | 1,99 | 2977,32 | 2874,11 | 3,59 |
| 10 | 1766,80 | 1744,43 | 1,28 | 2650,20 | 2571,11 | 3,08 | 3533,60 | 3356,22 | 5,29 |
| **Max** | | | **3,07** | | | **3,08** | | | **5,29** |

| Form | 1/12 | | ε, % | 1/10 | | ε, % | 1/5 | | ε, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ЗФ (8) | МСЕ | | ЗФ (8) | МСЕ | | ЗФ (9) | МСЕ | |
| 1 | 800,95 | 782,88 | 2,31 | 961,14 | 933,56 | 2,95 | 1922,28 | 1763,64 | 9,00 |
| 2 | 801,50 | 783,06 | 2,35 | 961,80 | 933,59 | 3,02 | 1923,60 | 1763,96 | 9,05 |
| 3 | 1363,20 | 1335,32 | 2,09 | 1635,84 | 1596,44 | 2,47 | 3271,68 | 2980,17 | 9,78 |
| 4 | 1896,45 | 1821,79 | 4,10 | 2275,74 | 2163,73 | 5,18 | 4551,48 | 3898,10 | 16,76 |
| 5 | 1896,75 | 1822,12 | 4,10 | 2276,10 | 2163,97 | 5,18 | 4552,20 | 3898,73 | 16,76 |
| 6 | 2740,50 | 2604,61 | 5,22 | 3288,60 | 3079,60 | 6,79 | 6577,20 | 5374,48 | 22,38 |
| 7 | 2740,90 | 2604,79 | 5,23 | 3289,08 | 3079,66 | 6,80 | 6578,16 | 5374,58 | 22,39 |
| 8 | 3720,05 | 3504,42 | 6,15 | 4464,06 | 4142,44 | 7,76 | 8928,12 | 7031,55 | 26,97 |
| 9 | 3721,65 | 3505,02 | 6,18 | 4465,98 | 4142,91 | 7,80 | 8931,96 | 7032,34 | 27,01 |
| 10 | 4417,00 | 4085,04 | 8,13 | 5300,40 | 4783,30 | 10,81 | 10600,80 | 7908,13 | 34,05 |
| **Max** | | | **8,13** | | | **10,81** | | | **34,05** |

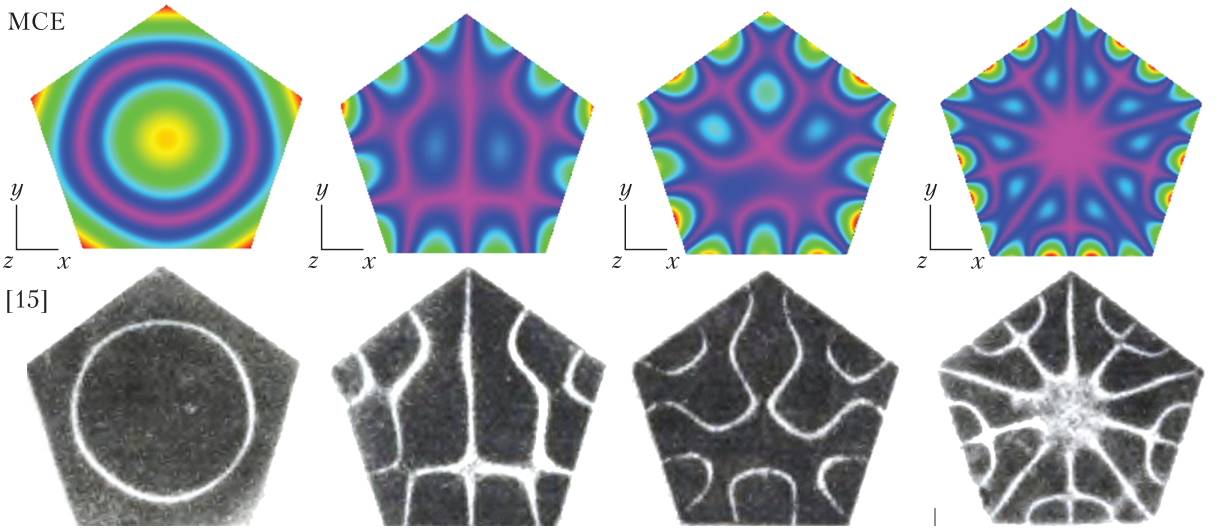


***Рис. 1.*** Порівняння чотирьох форм коливань, отриманих МСЕ та експериментально [15]

мані коефіцієнти форм коливань і граничних умов для п'ятикутних пластин з вільними краями наведені в табл. 1.

Розрахуємо МСЕ та ЗФ (8) з коефіцієнтами з табл. 1 частоти вільних коливань алюмінієвих п'ятикутних пластин зі стороною $a = 0{,}24$ м та співвідношеннями товщини пластини до сторони пластини $h/a$ : 1/240, 1/120, 1/60, 1/30, 1/20, 1/15, 1/12, 1/10, 1/5, відповідні співвідношення для трикутних пластин з вільними краями розглядаються в [14]. Отримані результати, а саме, перші десять

Таблиця 3. **Уточнені коефіцієнти за формулою (9) при $h/a$ = 1/8**

| $i$ | $F_i$ | $i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,408116 | 6 | 1,322053 |
| 2 | 0,408162 | 7 | 1,322191 |
| 3 | 0,696371 | 8 | 1,766014 |
| 4 | 0,935721 | 9 | 1,766577 |
| 5 | 0,935926 | 10 | 2,025254 |

Таблиця 4. **Перші десять частот вільних коливань, розраховані двома методами з урахуванням коефіцієнтів табл. 3**

| Form | 1/10 | | $\varepsilon_e$, % | 1/8 | | $\varepsilon_e$, % | 1/5 | | $\varepsilon_e$, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ЗФ (8) | МСЕ | | ЗФ (8) | МСЕ | | ЗФ (8) | МСЕ | |
| 1 | 922,05 | 933,56 | 1,23 | 1152,56 | 1152,56 | 0,00 | 1844,10 | 1763,64 | 4,56 |
| 2 | 922,15 | 933,59 | 1,23 | 1152,69 | 1152,69 | 0,00 | 1844,30 | 1763,96 | 4,55 |
| 3 | 1573,30 | 1596,44 | 1,45 | 1966,62 | 1966,62 | 0,00 | 3146,59 | 2980,17 | 5,58 |
| 4 | 2114,06 | 2163,73 | 2,30 | 2642,57 | 2642,57 | 0,00 | 4228,11 | 3898,10 | 8,47 |
| 5 | 2114,52 | 2163,97 | 2,29 | 2643,15 | 2643,15 | 0,00 | 4229,04 | 3898,73 | 8,47 |
| 6 | 2986,89 | 3079,60 | 3,01 | 3733,61 | 3733,61 | 0,00 | 5973,78 | 5374,48 | 11,15 |
| 7 | 2987,20 | 3079,66 | 3,00 | 3734,00 | 3734,00 | 0,00 | 5974,40 | 5374,58 | 11,16 |
| 8 | 3989,92 | 4142,44 | 3,68 | 4987,40 | 4987,40 | 0,00 | 7979,84 | 7031,55 | 13,49 |
| 9 | 3991,19 | 4142,91 | 3,66 | 4988,99 | 4988,99 | 0,00 | 7982,38 | 7032,34 | 13,51 |
| 10 | 4575,62 | 4783,30 | 4,34 | 5719,52 | 5719,52 | 0,00 | 9151,23 | 7908,13 | 15,72 |
| **Max** | | | **4,34** | | | **0,00** | | | **15,72** |

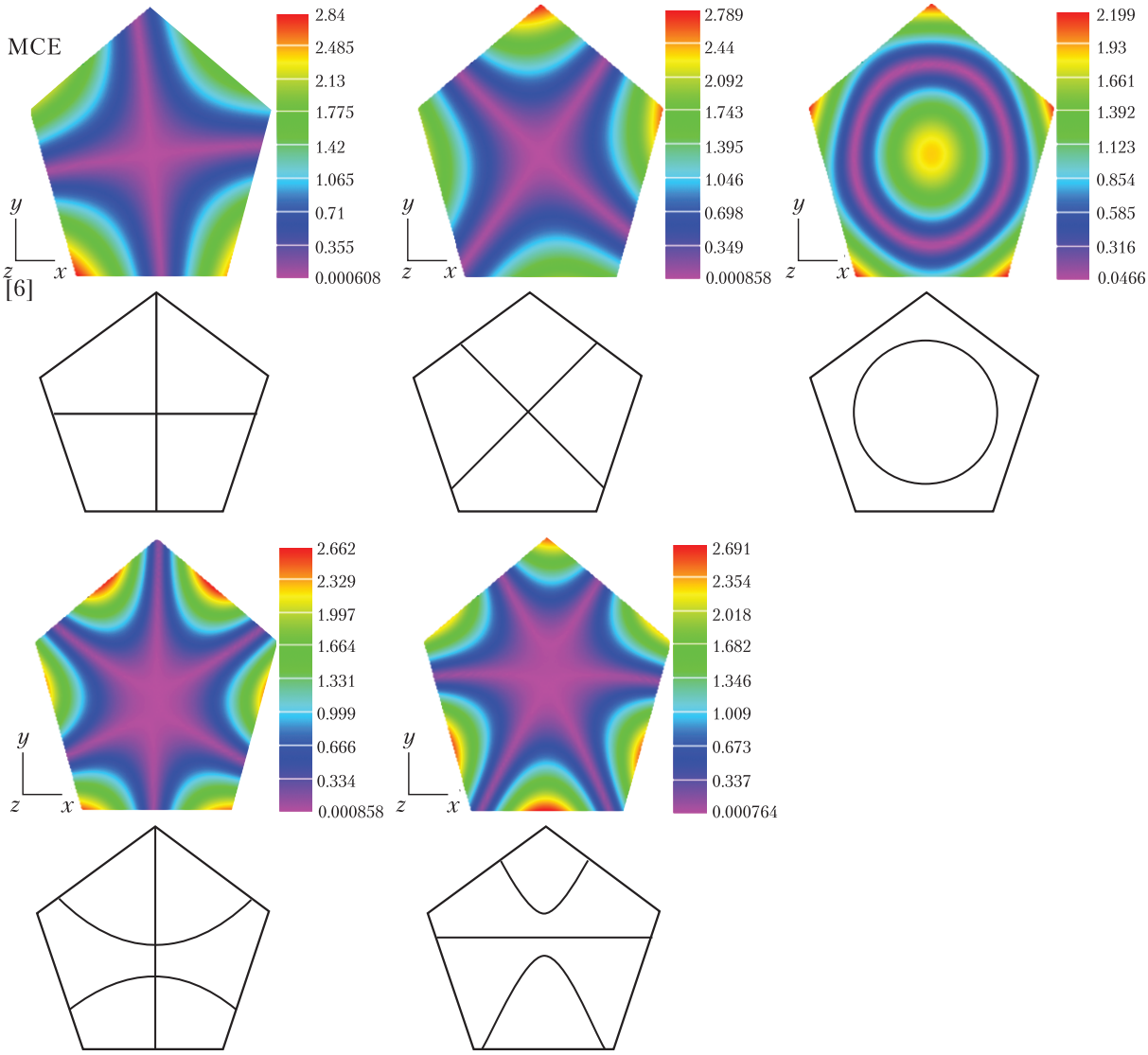


***Рис. 2.*** Порівняння п'яти форм коливань, отриманих МСЕ та чисельно [6]

частот, представлені в табл. 2, де ε — відхилення між частотами у відсотках, розраховані двома методами.

Аналізуючи дані табл. 2, можна встановити межі застосування ЗФ (8) для п'ятикутних пластин з вільними краями, а саме: для перших десяти частот при $h/a \leqslant 1/60$ відхилення між розрахованими частотами за ЗФ в порівнянні з частотами, розрахованими МСЕ, становить $\varepsilon < 1\%$, при $h/a \leqslant 1/10$ — $\varepsilon < 11\%$, а для перших трьох частот при $h/a \leqslant 1/5$ відхилення становить $\varepsilon < 10\%$. В механіці вважаються найнебезпечнішими перші частоти вільних коливань, оскільки при них найбільші амплітуди коливань, тому ЗФ (8) з коефіцієнтами з табл. 1 є достатньо точною для розрахунку перших трьох частот в межах $h/a \leqslant 1/5$.

Проведемо додаткове уточнення коефіцієнтів форм коливань і граничних умов за формулою (9) для п'ятикутних пластин із співвідношень $h/a \geqslant 1/10$ взявши за основу розраховані частоти МСЕ для пластини із співвідношенням $h/a = 1/8$ (табл. 3).

Розрахуємо МСЕ та ЗФ (8) з коефіцієнтами з табл. 3 частоти вільних коливань алюмінієвих п'ятикутних пластин зі стороною $a = 0{,}24$ м та співвідношеннями товщини пластини до сторони пластини $h/a$: 1/10, 1/8, 1/5. Отримані результати, а саме, перші десять частот, наведені в табл. 4.

Аналіз табл. 4 показує, що проведені уточнення коефіцієнтів значно покращили розрахунки за ЗФ (8), при цьому для перших десяти частот при $h/a \leqslant 1/10$ відхилення між розрахованими частотами за ЗФ (8) в порівнянні з частотами, розрахованими МСЕ, становить $\varepsilon < 5\,\%$. Цей результат вдвічі кращий за попередні розрахунки, а для частот при $h/a \leqslant 1/5$ — становить $\varepsilon < 16\,\%$, що також є вдвічі кращим результатом за попередні розрахунки. Якщо розглядати перші три частоти, то при $h/a \leqslant 1/5$ відхилення становить $\varepsilon < 6\,\%$.

ЗФ (8) з табл. 1 і 3 коефіцієнтів форм коливань та граничних умов можна використовувати для швидкого інженерного розрахунку перших десяти частот і форм вільних коливань п'ятикутних пластин з вільними краями.

Проведене порівняння отриманих форми коливань п'ятикутних пластин з вільними краями з формами коливань, розрахованими іншими авторами різними методами, ілюструють рис. 1 та 2.

**Висновки.** В роботі поширено підхід для розрахунку частот вільних коливань ізотропних квадратних пластин методом Релея—Рітца на розрахунок частот вільних коливань п'ятикутних пластин різної товщини з вільними краями та розраховані коефіцієнти форм коливань і граничних умов, які залежать від співвідношення товщини до сторони пластини. Поширено метод скінченних елементів до визначення частот і форм вільних коливань пластин вказаного класу.

При дослідженні отримані такі конкретні результати:

• розв'язані задачі про вільні коливання п'ятикутної пластини різної товщини з вільними краями та проведено уточнення коефіцієнтів форми коливань і граничних умов формули, отриманої методом Релея—Рітца, для пластин $1/10 <= h/a <= 1/5$;

• узагальнено використання формули, отриманої методом Релея—Рітца, згідно з яким похибка розрахунку перших десяти частот вільних коливань за формулою порівняно з розрахунком МСЕ не перевищує 11 % при $h/a < 1/10$ та 16 % при $1/10 <= h/a <= 1/5$, а для перших трьох частот не перевищує 6 % для всіх розглянутих товщин пластини;

• проведено порівняння розрахованих форм коливань МСЕ з формами коливань, отриманими чисельно та експериментально для п'ятикутної пластин.

Реалізовані у роботі підходи дозволяють досліджувати динамічні характеристики пластин інших конфігурацій і можуть бути використані для оцінки точності інших підходів, а також при аналізі поведінки конкретних конструктивних елементів.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА


1. Grigorenko A.Ya., Efimova T.L. Spline-Approximation Method Applied to Solve Natural Vibration Problems for Rectangular Plates of Varying Thickness. *Int. Appl. Mech.* 2005. **41**, № 10. P. 1161—1169. https://doi.org/10.1007/s10778-006-0022-2
2. Lam K.Y., Liew K.M., Chow S.T. Free vibration analysis of isotropic and orthotropic triangular plate. *Int. J. Mech. Sci.* 1990. **32**, № 5. P. 455—464. https://doi.org/10.1016/0020-7403(90)90172-F
3. Leissa A. W., Jaber N. A. Vibrations of completely free triangular plate. *Int. J. Mech. Sci.* 1992. **34**, № 8. P. 605—616. https://doi.org/10.1016/0020-7403(92)90058-O
4. Liew K.M., Xiang Y., Kitipornchai S. Research on thick plate vibration: a literature survey. *J. Sound Vib.* 1995. **180**, № 1. P. 163—176. https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0072
5. Мелешко В.В., Папков С.О. Изгибные колебания упругих прямоугольных пластин со свободными краями: от Хладни (1809) и Ритца (1990) до наших дней. *Акуст. вісн.* 2009. **12**, № 4. С. 34—51.
6. Wang C.Y. Vibrations of Completely Free Rounded Regular Polygonal Plates. *Int. J. Acoust. Vib.* 2015. **20**, № 2. P. 107—112.
7. Grigorenko O.Y., Borisenko M.Y., Boichuk O.V., Vasil'eva L.Y. Free Vibrations of Triangular Plates with a Hole. *Int. Appl. Mech.* 2021. **57**, № 5. P. 534—542. https://doi.org/10.1007/s10778-021-01104-3
8. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В., Новицький В.С. Чисельний аналіз вільних коливань прямокутних пластин на основ різних підходів. *Вісн. Запорізького нац. унів. Сер. фіз.-мат. науки.* 2019. №1. С. 33—34. https://doi.org/10.26661/2413-6549-2019-1-05
9. Borysenko M., Zavhorodnii A., Skupskyi R. Numerical analysis of frequencies and forms of own collars of different forms with free zone. *J. Appl. Math. Comput. Mech.* 2019. **18**, № 1. P. 5—13. https://doi.org/10.17512/jamcm.2019.1.01
10. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В., Новицький В.С. Застосування експериментального і чисельного методів до дослідження вільних коливань прямокутних пластин. *Пробл. обчисл. мех. і міцн. констр.* 2019. **29**. С. 103—112. https://doi.org/10.15421/4219009
11. Ma C.C., Huang C.H. Experimental whole-field interferometry for transverse vibration of plate. *J. Sound Vib.* 2004. **271**, № 3-5. P. 493—506. https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00276-1
12. Karlash V.L. Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates. *Int. Appl. Mech.* 2005. **41**, № 7. P. 709—747. https://doi.org/10.1007/s10778-005-0140-2
13. Прочность. Устойчивость. Колебания: справочник в 3 т. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко (ред.). Москва: Машиностроение, 1968. 567 с.
14. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Чисельне визначення частот і форм вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин з вільними краями. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2020. **63,** № 3. С. 28—39. https://doi.org/10.15407/mmpmf2020.63.3.28-39
15. Waller M. D. Vibrations of free plates: line symmetry; corresponding modes. *Proc. Roy. Soc. Lond. A Math. Phys. Sci.* 1952. **211**, № 1105. P. 265—276. https://doi.org/10.1098/rspa.1952.0038


Надійшло до редакції 28.06.2022

REFERENCES


1. Grigorenko, A. Ya. & Efimova, T. L. (2005). Spline-Approximation Method Applied to Solve Natural Vibration Problems for Rectangular Plates of Varying Thickness. Int. Appl. Mech., 41, No. 10, pp. 1161-1169. https://doi.org/10.1007/s10778-006-0022-2
2. Lam, K. Y., Liew, K. M. & Chow, S. T. (1990). Free vibration analysis of isotropic and orthotropic triangular plate. Int. J. Mech. Sci., 32, No. 5, pp. 455-464. https://doi.org/10.1016/0020-7403(90)90172-F
3. Leissa, A. W. & Jaber, N. A. (1992). Vibrations of completely free triangular plate. Int. J. Mech. Sci., 34, No. 8, pp. 605-616. https://doi.org/10.1016/0020-7403(92)90058-O
4. Liew K.M., Xiang Y. & Kitipornchai S. (1995). Research on thick plate vibration: a literature survey. *J. Sound Vib.*, 180, No. 1, pp. 163-176. https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0072
5. Meleshko, V. V. & Papkov, S. O. (2009). Bending vibration of the rectangular elastic plates with free edges: from Chladni (1809) and Ritz (1909) to the present day. Acoust. Bullet., 12, No. 4, pp. 34-51 (in Russian).

6. Wang, C. Y. (2015). Vibrations of Completely Free Rounded Regular Polygonal Plates. Int. J. Acoust. *Vib*., 20, No. 2, pp. 107-112.
7. Grigorenko, O. Y., Borisenko, M. Y., Boichuk, O. V. & Vasil'eva, L. Y. (2021). Free Vibrations of Triangular Plates with a Hole. Int. Appl. Mech., 57, No. 5, pp. 534-542. https://doi.org/10.1007/s10778-021-01104-3
8. Grigorenko, O. Ya., Borisenko, M. Yu., Boichuk, O. V. & Novitskii, V. S. (2019). Numerical analysis of the free vibrations of rectangular plates using various approaches. Visn. Zaporizhzhya Nat. Univ. Phys.-Mat. Sci., No. 1, pp. 33-41. (in Ukrainian). https://doi.org/10.26661/2413-6549-2019-1-05
9. Borysenko, M., Zavhorodnii, A. & Skupskyi, R. (2019). Numerical analysis of frequencies and forms of own collars of different forms with free zone. J. Appl. Math. Comput. Mech., 18, No. 1, pp. 5-13. https://doi.org/10.17512/jamcm.2019.1.01
10. Grigorenko, O. Ya., Borisenko, M. Yu., Boichuk, O. V. & Novitskii, V. S. (2019). Usage of experimental and numerical methods to study the free vibrations of rectangular plates. Probl. Comp. Mech. Streng. Struct., 29, pp. 103-112. (in Ukrainian). https://doi.org/10.15421/4219009
11. Ma, C. C. & Huang, C. H. (2004). Experimental whole-field interferometry for transverse vibration of plate. *J. Sound Vib*., 271, No. 3-5, pp. 493-506. https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00276-1
12. Karlash, V. L. (2005). Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates. Int. Appl. Mech., 41, No. 7, pp. 709-747. https://doi.org/10.1007/s10778-005-0140-2
13. Byrger, I. A. & Panovko, Y. G. (1968). Strength. Sustainability. Oscillations. Moscow: Mashinostroenie (in Russian).
14. Grigorenko, O. Ya., Borysenko, M. Yu. & Boychuk, O. V. (2020). Numerical evaluation of frequencies and modes of free vibrations of isosceles triangular plates with free edges. Mat. Metody ta Fiz.-Mekh. Polya, 63, No. 3, pp. 28-39. (in Ukrainian). https://doi.org/10.15407/mmpmf2020.63.3.28-39
15. Waller, M. D. (1952). Vibrations of free plates: line symmetry; corresponding modes. Proc. Roy. Soc. Lond. A Math. Phys. Sci., 211, No. 1105, pp. 265-276. https://doi.org/10.1098/rspa.1952.0038

Received 28.06.2022

*A.Ya. Grigorenko*[1], https://orcid.org/0000-0002-4109-2672
*M.Yu. Borysenko*[1], https://orcid.org/0000-0002-7287-0975
*S.O.Sperkach*[2], https://orcid.org/0000-0003-3168-6300
*A.D. Bezuglaya*[2], https://orcid.org/0000-0001-8083-3210
*E.O Mikhrin*[3], https://orcid.org/0000-0001-7405-6902

[1] S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

[2] Technical center of the NAS of Ukraine, Kyiv

[3] Mykolayiv Municipal Collegium named after V. Chayka

E-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com, mechanics530@gmail.com,
svetlana@nasu.kiev.ua, bezuglaya.anna24@gmail.com, emihrin50@gmail.com

NUMERICAL ANALYSIS OF FREE VIBRATION FREQUENCIES OF PENTAGONAL PLATES

Free vibrations of the isotropic pentagonal plates of the different thicknesses with the free edges are considered based on two different approaches. The approach Rayleigh—Ritz method has been extended to the calculation of the frequencies of free vibrations of pentagonal plates. Frequencies and forms of free vibrations of the plates of this class are calculated by the finite element method (FEM). The frequencies calculated were compared and the accuracy of the calculations by the two methods was established. The modes of the vibrations obtained based on the FEM are compared with the modes of vibrations obtained numerically and experimentally by other authors.

***Keywords****: pentagonal plate, frequency and mode of free vibrations, finite element method, Rayleigh—Ritz method, FEMAP.*