

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2026.04.043>

УДК 519.8

П.І. Стецюк, <https://orcid.org/0000-0003-4036-2543>

О.М. Хом'як, <https://orcid.org/0000-0002-5384-9070>

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна

E-mail: stetsyukp@gmail.com, khomiak.olha@gmail.com

Лінійна модель розподілу потоків регіональної енергосистеми за умов знеструмлення магістральних вузлів

Представлена членом-кореспондентом НАН України П.С. Кноповим

Розроблено математичну модель мінімізації моменту потужності електромережі з урахуванням пропускної здатності ліній електропередачі, балансових співвідношень у магістральних вузлах живлення мережі та вузлах навантаження, повного використання потужностей вузлів живлення та умов знеструмлення вхідних ліній окремих магістральних вузлів. Математичну модель сформульовано як задачу лінійного програмування, для якої досліджено властивості розв'язку, а також необхідні та достатні умови сумісності системи лінійних обмежень. Показано, що для мінімального моменту потужності відповідні потоки енергії передаються лініями електропередачі тільки в одному напрямку. Встановлено умови, за яких пересилання обсягів потоків у електромережі забезпечити неможливо. Наведено результати розрахунків розподілу потоків енергії, а також оцінювання ефективності поточкорозподілу (за критерієм мінімального моменту потужності) для десяти варіантів функціонування модельної енергосистеми (п'ять вузлів живлення та десять вузлів навантаження) за умов знеструмлення вхідних ліній вузлів живлення. Розроблена математична модель може бути використана для балансування регіональних енергосистем у разі непередбачуваних пошкоджень енергетичної інфраструктури та виникнення при цьому некерованого дефіциту потужності.

Ключові слова: вузли живлення, вузли навантаження, розподіл потоків потужності, момент потужності, задача лінійного програмування, пропускна здатність ліній електропередачі, знеструмлення магістральних вузлів.

Вступ. У статті [1] описано математичну модель мінімізації моменту потужності електромережі з урахуванням пропускної здатності ліній електропередачі, балансових співвідношень у вузлах живлення мережі та вузлах навантаження регіональної енергосистеми. Математичну модель сформульовано як задачу цілочислового лінійного програмування, де цілочислові змінні є булевими і задають один із напрямків передавання потужностей лініями електропередачі в мережі.

Ц и т у в а н н я: Стецюк П.І., Хом'як О.М. Лінійна модель розподілу потоків регіональної енергосистеми за умов знеструмлення магістральних вузлів. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2026. № 4. С. 43—55. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2026.04.043>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2026. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

Передавання потужності між вузлами живлення магістральної мережі та вузлами навантаження розподільної мережі допускається в будь-якому напрямку за умови виконання першого закону Кірхгофа (сума потужностей, що надходить у вузол, дорівнює сумі потужностей, що з нього виходить) і дотримання обмежень пропускної здатності ліній електропередачі.

Вхідні дані для модельної електроенергетичної мережі, що складається з п'яти вузлів живлення (множина A) та десяти вузлів навантаження регіональної енергосистеми (множина B), наведено в табл. 1. Тут задано відповідні потужності магістральних вузлів A_i , $i = 1, \dots, 5$, та попит у вузлах навантаження B_i , $i = 1, \dots, 10$, а також відповідні довжини ліній електропередачі між вузлами. Для магістральних ліній електропередачі верхню межу пропускної здатності встановлено на рівні $800 \text{ МВ} \cdot \text{А}$ (мегавольт-ампер, одиниця повної електричної потужності), а для ліній, що з'єднують вузли живлення та вузли навантаження, — $180 \text{ МВ} \cdot \text{А}$.

Проведені в [1] розрахунки дали змогу отримати орієнтовані графи розподілу потоків енергії та значення ефективності цього розподілу за умови забезпечення нормальної роботи модельної електроенергетичної системи. Розглядався також варіант з повним знеструмуванням вхідних ліній, що заживлюють вузол A_1 , але зі збереженням його працездатності, за незмінності лімітів вузлів A_2, A_3, A_4, A_5 . У роботі [2] математичну модель задачі оптимізації уточнено для випадку оптимального перерозподілу потужності вузла A_1 (або будь-якого іншого) між іншими вузлами.

У статті [3] розроблено математичні моделі для балансування електроенергетичної системи в умовах часткового та повного знеструмування окремих вузлів живлення магістральної мережі. Моделі сформульовано як задачі змішаного булевого лінійного програмування, за допомогою яких можна як знаходити оптимальний потокорозподіл, так і виявляти “критичні” верхні межі на потужності між вузлами, коли забезпечити попит вузлів живлення розподільної мережі неможливо.

Таблиця 1. Параметри модельної електроенергетичної мережі [1]

Вузли A	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5					
$\text{МВ} \cdot \text{А}$	800	700	650	500	450					
Вузли B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
$\text{МВ} \cdot \text{А}$	250	630	400	250	160	160	250	250	500	250
ЛЕП	A_1A_2	A_2A_3	A_3A_4	A_4A_5	A_5A_1	A_1B_1	A_1B_2	A_1B_3	A_1B_4	A_1B_5
d_{ij}	35	70	50	25	65	13	7	9	15	20
ЛЕП	A_2B_2	A_2B_3	A_2B_5	A_2B_8	A_2B_9	A_3B_2	A_3B_5	A_3B_6	A_3B_9	A_3B_{10}
d_{ij}	12	15	5	20	15	22	15	20	6	11
ЛЕП	A_4B_3	A_4B_7	A_4B_8	A_4B_9	A_4B_{10}	A_5B_1	A_5B_2	A_5B_4	A_5B_6	A_5B_7
d_{ij}	25	18	6	17	10	7	17	3	18	13

Мета дослідження — спростити математичну модель, запропоновану в роботі [3], для мінімізації моменту потужності електроенергетичної системи з частковим знеструмленням окремих вузлів живлення та дослідити властивості оновленої моделі. Спрощену модель сформульовано у вигляді задачі лінійного програмування (ЛП-задачі), попереднє формулювання якої для загального випадку транспортних задач наведено в [4], де A — множина постачальників (вузлів живлення), B — множина споживачів (вузлів навантаження).

Формулювання ЛП-задачі. Нехай A — множина вузлів живлення, B — множина вузлів навантаження, n_A — кількість вузлів A , n_B — кількість вузлів B .

Для кожного вузла живлення $i \in A$ задано наявну в нього потужність a_i^0 . Також задано Z_A — сумарну потужність, яка може бути додатково розподілена між вузлами живлення. Вважатимемо, що вузлу живлення $i \in A$ може бути додано потужність, не меншу ніж z_i^{low} (нижня межа) та не більшу ніж z_i^{up} (верхня межа).

Для кожного вузла навантаження $j \in B$ задано потребу в потужності b_j (необхідна потужність), яка задається в тих самих одиницях, що й потужності вузлів живлення.

Нехай $E_{AA} \subset A \times A$ — множина ребер, яка задає зв'язки між вузлами живлення, а $E_{AB} \subset A \times B$ — множина ребер, яка задає зв'язки між вузлами живлення та вузлами навантаження, m_{AA} — кількість ребер E_{AA} , m_{AB} — кількість ребер E_{AB} .

Для кожного ребра ij задано вартості передавання одиниці потужності $d_{ij}^{AA} = d_{ji}^{AA}$, $ij \in E_{AA}$ та $d_{ij}^{AB} = d_{ji}^{AB}$, $ij \in E_{AB}$ і верхні межі $x_{ij}^{\text{up}} = x_{ji}^{\text{up}}$, $ij \in E_{AA}$ та $y_{ij}^{\text{up}} = y_{ji}^{\text{up}}$, $ij \in E_{AB}$ для потужностей, які можна передавати або дугою ij , або дугою ji .

Задача полягає в знаходженні мінімальної сумарної вартості передавання потужностей у мережі за умов дотримання верхніх обмежень на обсяги потоків, повного використання потужностей вузлів живлення та максимального забезпечення необхідних потреб вузлів навантаження.

Нехай змінні $x_{ij}^+ \geq 0$, $x_{ij}^- \geq 0$, $i, j \in A$, $ij \in E_{AA}$ — невідомі обсяги потоків між вузлами живлення, а змінні $y_{ij}^+ \geq 0$, $y_{ij}^- \geq 0$, $i \in A$, $j \in B$, $ij \in E_{AB}$ — невідомі обсяги між вузлами живлення та вузлами навантаження. Знаки “+” і “−” позначають напрямок потоку від вершини i до вершини j та від вершини j до вершини i відповідно.

Нехай змінні $z_i \geq 0$ — невідомі значення доданих потужностей для вузлів живлення $i \in A$, сума яких дорівнює Z_A . Вони задовольняють умови $z_i^{\text{low}} \leq z_i \leq z_i^{\text{up}}$, де z_i^{low} та z_i^{up} — задані нижні та верхні межі на керування доданими потужностями для вузлів живлення $i \in A$.

Нехай змінні $u_{ij} \geq 0$, $ij \in E_{AA}$ та $v_{ij} \geq 0$, $ij \in E_{AB}$ — невідомі потужності, які будемо додавати до верхніх меж на потоки для ребер E_{AA} та E_{AB} . Додатні штрафні коефіцієнти P_{AA} та P_{AB} використовуватимемо для виявлення “вузьких місць” у мережі, коли передавання потужностей у мережі забезпечити неможливо.

Також нехай $z = \{z_i\}_{i \in A}$, $x = \{x_{ij}^+, x_{ij}^-\}_{ij \in E_{AA}}$, $y = \{y_{ij}^+, y_{ij}^-\}_{ij \in E_{AB}}$, $u = \{u_{ij}\}_{ij \in E_{AA}}$, $v = \{v_{ij}\}_{ij \in E_{AB}}$. Тоді задача знаходження мінімальної сумарної вартості пересилання потоків у мережі формулюється як ЛП-задача: знайти

$$F^* = \min_{z, x, y, u, v} \left\{ F = \sum_{ij \in E_{AA}} (d_{ij}^{AA} (x_{ij}^+ + x_{ij}^-) + P_{AA} u_{ij}) + \sum_{ij \in E_{AB}} (d_{ij}^{AB} (y_{ij}^+ + y_{ij}^-) + P_{AB} v_{ij}) \right\} \quad (1)$$

за обмежень

$$\sum_{j: ij \in E_{AA}} (x_{ij}^+ - x_{ij}^-) - \sum_{j: ji \in E_{AA}} (x_{ji}^+ - x_{ji}^-) + \sum_{j: ij \in E_{AB}} (y_{ij}^+ - y_{ij}^-) = a_i^0 + z_i, \quad \forall i \in A, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in A} z_i = Z_A, \quad z_i^{\text{low}} \leq z_i \leq z_i^{\text{up}}, \quad i \in A, \quad (3)$$

$$\sum_{i:ij \in E_{AB}} (y_{ij}^+ - y_{ij}^-) \leq b_j, \quad \forall j \in B, \quad (4)$$

$$x_{ij}^+ \leq x_{ij}^{\text{up}} + u_{ij}, \quad x_{ij}^- \leq x_{ij}^{\text{up}} + u_{ij}, \quad i, j \in A, \quad ij \in E_{AA}, \quad (5)$$

$$y_{ij}^+ \leq y_{ij}^{\text{up}} + v_{ij}, \quad y_{ij}^- \leq y_{ij}^{\text{up}} + v_{ij}, \quad i \in A, \quad j \in B, \quad ij \in E_{AB}, \quad (6)$$

$$x_{ij}^+ \geq 0, \quad x_{ij}^- \geq 0, \quad u_{ij} \geq 0, \quad i, j \in A, \quad ij \in E_{AA}, \quad (7)$$

$$y_{ij}^+ \geq 0, \quad y_{ij}^- \geq 0, \quad v_{ij} \geq 0, \quad i \in A, \quad j \in B, \quad ij \in E_{AB}. \quad (8)$$

Тут $F(x, y, u, v)$ — цільова функція (1) є лінійною та описується двома складовими $F(x, y, u, v) = M(x, y) + P(u, v)$, де функції $M(x, y)$ та $P(u, v)$ такі:

$$M(x, y) = \sum_{ij \in E_{AA}} d_{ij}^{AA} (x_{ij}^+ + x_{ij}^-) + \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB} (y_{ij}^+ + y_{ij}^-),$$

$$P(u, v) = \sum_{ij \in E_{AA}} P_{AA} u_{ij} + \sum_{ij \in E_{AB}} P_{AB} v_{ij}.$$

Перша складова — сумарна вартість передавання потоків у мережі, а друга складова — штрафи за корекції верхніх меж на потоки. За допомогою першої складової можна мінімізувати вартість передавання потоків у мережі (момент потужності в електроенергетичних задачах), а за допомогою другої — визначити, наскільки потрібно збільшити верхні межі на передавання потоків, якщо система обмежень (2)—(8) є несумісною.

Лінійні рівності (2) означають, що кожен із вузлів живлення повинен передати вузлам навантаження весь обсяг потужності, яка складається з його власної наявної потужності та частини потужності, що виникає внаслідок розподілу Z_A одиниць потужності між усіма вузлами живлення. Обмеження (3) визначають розподіл потужності між вузлами. Для того щоб вузол живлення i отримав заданий обсяг потужності $\bar{z}_i$, достатньо встановити однаковими його нижню та верхню межі $z_i^{\text{low}} = z_i^{\text{up}} = \bar{z}_i$.

Лінійні нерівності (4) означають, що кожен із вузлів навантаження може недоотримати необхідний обсяг потужності.

Лінійні нерівності (5) означають, що передавати потоки по ребрах E_{AA} дозволяється, не порушуючи при цьому верхніх меж на обсяги потоків. Лінійні нерівності (6) означають те саме, але для множини ребер E_{AB} .

Лінійні нерівності (7) задають умови на невід'ємність змінних $x = \{x_{ij}^+, x_{ij}^-\}$ та $u = \{u_{ij}\}$ для всіх $ij \in E_{AA}$, а лінійні нерівності (8) — на невід'ємність змінних $y = \{y_{ij}^+, y_{ij}^-\}$ та $v = \{v_{ij}\}$ для всіх $ij \in E_{AB}$.

Властивості ЛП-задачі. Задача (1)—(8) є задачею лінійного програмування. Кількість змінних дорівнює $n = n_A + 3(m_{AA} + m_{AB})$, а кількість обмежень, не враховуючи обмежень (7) та (8), — $m = 3n_A + n_B + 2(m_{AA} + m_{AB}) + 1$.

Нехай $z^* = \{z_i^*\}_{i \in A}$, $x^* = \{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\}_{ij \in E_{AA}}$, $y^* = \{(y_{ij}^+)^*, (y_{ij}^-)^*\}_{ij \in E_{AB}}$, $u^* = \{u_{ij}^*\}_{ij \in E_{AA}}$, $v^* = \{v_{ij}^*\}_{ij \in E_{AB}}$ — розв'язок задачі (1)—(8).

Твердження 1. Для $x^* = \{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\}_{ij \in E_{AA}}$ та $y^* = \{(y_{ij}^+)^*, (y_{ij}^-)^*\}_{ij \in E_{AB}}$ справедлива така рівність:

$$\sum_{ij \in E_{AA}} d_{ij}^{AA} \min\{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\} + \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB} \min\{(y_{ij}^+)^*, (y_{ij}^-)^*\} = 0. \quad (9)$$

Рівність (9) гарантує, що оптимальні потоки по ребрах E_{AA} та E_{AB} передаються тільки в одному напрямку.

Доведення. Нехай $\tilde{x}^* = \{(\tilde{x}_{ij}^+)^*, (\tilde{x}_{ij}^-)^*\}_{ij \in E_{AA}}$ та $\tilde{y}^* = \{(\tilde{y}_{ij}^+)^*, (\tilde{y}_{ij}^-)^*\}_{ij \in E_{AB}}$ такі, що

$$(\tilde{x}_{ij}^+)^* = (x_{ij}^+)^* - \min\{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\}, \quad (\tilde{x}_{ij}^-)^* = (x_{ij}^-)^* - \min\{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\}, \quad ij \in E_{AA}. \quad (10)$$

$$(\tilde{y}_{ij}^+)^* = (y_{ij}^+)^* - \min\{(y_{ij}^+)^*, (y_{ij}^-)^*\}, \quad (\tilde{y}_{ij}^-)^* = (y_{ij}^-)^* - \min\{(y_{ij}^+)^*, (y_{ij}^-)^*\}, \quad ij \in E_{AB}. \quad (11)$$

Покажемо, що $\tilde{x}^*$, $\tilde{y}^*$, $\tilde{z}^* = z^*$, $\tilde{u}^* = u^*$, $\tilde{v}^* = v^*$ задовольняють обмеження (2)—(8).

З огляду на те, що з формули (10) маємо, що для всіх $ij \in E_{AA}$ $(\tilde{x}_{ij}^+)^* \geq 0$, $(\tilde{x}_{ij}^-)^* \geq 0$, а із формули (11) маємо, що для всіх $ij \in E_{AB}$ $(\tilde{y}_{ij}^+)^* \geq 0$, $(\tilde{y}_{ij}^-)^* \geq 0$, то $\tilde{x}^*$, $\tilde{y}^*$ задовольняють обмеження (7) та (8) відповідно.

Також із формул (10) та (11) отримуємо, що для всіх $ij \in E_{AA}$ $(\tilde{x}_{ij}^+)^* \leq (x_{ij}^+)^*$, $(\tilde{x}_{ij}^-)^* \leq (x_{ij}^-)^*$, а для всіх $ij \in E_{AB}$ $(\tilde{y}_{ij}^+)^* \leq (y_{ij}^+)^*$, $(\tilde{y}_{ij}^-)^* \leq (y_{ij}^-)^*$, тоді $\tilde{x}^*$, $\tilde{y}^*$ задовольняють обмеження (5) та (6), що випливає з таких співвідношень:

$$(\tilde{x}_{ij}^+)^* \leq (x_{ij}^+)^* \leq x_{ij}^{\text{up}} + u_{ij}^*, \quad (\tilde{x}_{ij}^-)^* \leq (x_{ij}^-)^* \leq x_{ij}^{\text{up}} + u_{ij}^*, \quad i, j \in A, \quad ij \in E_{AA},$$

$$(\tilde{y}_{ij}^+)^* \leq (y_{ij}^+)^* \leq y_{ij}^{\text{up}} + v_{ij}^*, \quad (\tilde{y}_{ij}^-)^* \leq (y_{ij}^-)^* \leq y_{ij}^{\text{up}} + v_{ij}^*, \quad i \in A, \quad i, j \in B, \quad ij \in E_{AB}.$$

Зважаючи на те, що для всіх $ij \in E_{AB}$ справедливі рівності

$$(\tilde{y}_{ij}^+)^* - (\tilde{y}_{ij}^-)^* = (y_{ij}^+)^* - \min\{(y_{ij}^+)^*, (y_{ij}^-)^*\} - (y_{ij}^-)^* + \min\{(y_{ij}^+)^*, (y_{ij}^-)^*\} = (y_{ij}^+)^* - (y_{ij}^-)^*,$$

а y^* задовольняє обмеження (4), тобто

$$\sum_{i:ij \in E_{AB}} ((y_{ij}^+)^* - (y_{ij}^-)^*) \leq b_j, \quad \forall j \in B,$$

отримуємо, що $\tilde{y}^*$ також задовольняє обмеження (4)

$$\sum_{i:ij \in E_{AB}} ((\tilde{y}_{ij}^+)^* - (\tilde{y}_{ij}^-)^*) \leq b_j, \quad \forall j \in B.$$

Оскільки z^* задовольняє обмеження (3), тобто

$$\sum_{i \in A} z_i^* = Z_A, \quad z_i^{\text{low}} \leq z_i^* \leq z_i^{\text{up}}, \quad i \in A,$$

то $\tilde{z}^* = z^*$ також задовольнятиме обмеження (3), тобто

$$\sum_{i \in A} \tilde{z}_i^* = Z_A, \quad z_i^{\text{low}} \leq \tilde{z}_i^* \leq z_i^{\text{up}}, \quad i \in A.$$

З огляду на те, що для всіх $ij \in E_{AA}$ виконуються рівності

$$(\tilde{x}_{ij}^+)^* - (\tilde{x}_{ij}^-)^* = (x_{ij}^+)^* - \min\{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\} - (x_{ij}^-)^* + \min\{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\} = (x_{ij}^+)^* - (x_{ij}^-)^*,$$

а x^* задовольняє обмеження (2), тобто

$$\sum_{j:ij \in E_{AA}} ((x_{ij}^+)^* - (x_{ij}^-)^*) - \sum_{j:ji \in E_{AA}} ((x_{ij}^+)^* - (x_{ij}^-)^*) + \sum_{j:ij \in E_{AB}} ((y_{ij}^+)^* - (y_{ij}^-)^*) = z_i^*, \forall i \in A,$$

отримуємо, що $\tilde{x}^*$ також задовольняє обмеження (2)

$$\sum_{j:ij \in E_{AA}} ((\tilde{x}_{ij}^+)^* - (\tilde{x}_{ij}^-)^*) - \sum_{j:ji \in E_{AA}} ((\tilde{x}_{ij}^+)^* - (\tilde{x}_{ij}^-)^*) + \sum_{j:ij \in E_{AB}} ((\tilde{y}_{ij}^+)^* - (\tilde{y}_{ij}^-)^*) = \tilde{z}_i^*, \quad \forall i \in A.$$

Оптимальне значення цільової функції в (1) визначається за формулою

$$F^* = \sum_{ij \in E_{AA}} (d_{ij}^{AA}((x_{ij}^+)^* + (x_{ij}^-)^*) + P_{AA}u_{ij}^*) + \sum_{ij \in E_{AB}} (d_{ij}^{AB}((y_{ij}^+)^* + (y_{ij}^-)^*) + P_{AB}v_{ij}^*), \quad (12)$$

а значення цільової функції для $\tilde{x}^*$, $\tilde{y}^*$, $\tilde{u}^*$, $\tilde{v}^*$ — за формулою

$$\tilde{F}^* = \sum_{ij \in E_{AA}} (d_{ij}^{AA}((\tilde{x}_{ij}^+)^* + (\tilde{x}_{ij}^-)^*) + P_{AA}\tilde{u}_{ij}^*) + \sum_{ij \in E_{AB}} (d_{ij}^{AB}((\tilde{y}_{ij}^+)^* + (\tilde{y}_{ij}^-)^*) + P_{AB}\tilde{v}_{ij}^*). \quad (13)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \sum_{ij \in E_{AA}} (d_{ij}^{AA}((\tilde{x}_{ij}^+)^* + (\tilde{x}_{ij}^-)^*)) &= \sum_{ij \in E_{AA}} d_{ij}^{AA}((x_{ij}^+)^* + (x_{ij}^-)^* - 2\min\{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\}) = \\ &= \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB}((y_{ij}^+)^* + (y_{ij}^-)^*) - 2 \sum_{ij \in E_{AA}} d_{ij}^{AA} \min\{(x_{ij}^+)^* + (x_{ij}^-)^*\}, \\ \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB}((\tilde{y}_{ij}^+)^* + (\tilde{y}_{ij}^-)^*) &= \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB}((y_{ij}^+)^* + (y_{ij}^-)^*) - 2\min\{((y_{ij}^+)^* + (y_{ij}^-)^*)\} = \\ &= \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB}((y_{ij}^+)^* + (y_{ij}^-)^*) - 2 \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB} \min\{(y_{ij}^+)^* + (y_{ij}^-)^*\}, \end{aligned}$$

із формул (12) та (13) отримуємо рівність

$$\tilde{F}^* = F^* - 2 \left(\sum_{ij \in E_{AA}} d_{ij}^{AA} \min\{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\} + \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB} \min\{(y_{ij}^+)^* + (y_{ij}^-)^*\} \right). \quad (14)$$

Враховуючи, що ліва частина рівності (9) є невід'ємною, з формули (14) отримуємо, що рівність (9) є справедливою, оскільки приходимо до суперечності, що $\tilde{x}^*$, $\tilde{y}^*$, $\tilde{z}^*$, $\tilde{u}^*$, $\tilde{v}^*$ є розв'язком задачі (1)—(8) з меншим значенням цільової функції, ніж розв'язок x^* , y^* , z^* , u^* , v^* .

Твердження 1 доведено.

Якщо структура мережі така, що від кожного вузла живлення існує принаймні один шлях до кожного з вузлів навантаження, то справедливе таке твердження.

Твердження 2 [3]. *Якщо виконуються такі умови:*

$$1) \sum_{i \in A} z_i^{\text{low}} \leq Z_A \leq \sum_{i \in A} z_i^{\text{up}},$$

$$2) \sum_{i \in A} a_i^0 + Z_A \leq \sum_{j \in B} b_j,$$

то система обмежень (2)—(8) є сумісною.

Тут умова 1 означає, що весь сумарний обсяг потужності Z_A може бути розподілений між вузлами живлення, тобто він повинен бути не меншим за суму нижніх меж на додані обсяги потужності для всіх вузлів живлення та не більшим за суму верхніх меж; умова 2 означає, що у вузлах живлення продукції не більше, ніж її потребують вузли навантаження.

Якщо виконується твердження 2, то задача (1)—(8) має розв'язок, але він може не задовольняти верхні межі на передавання потоків. Це залежить від вибору штрафних коефіцієнтів P_{AA} та P_{AB} і може мати місце як у разі малих значень штрафних коефіцієнтів, коли передавання обсягів потоків у мережі можна задовольнити, так і за великих значень штрафних коефіцієнтів, коли передавання обсягів потоків у мережі неможливо задовольнити через занижені верхні межі на обсяги потоків по ребрах. Розрізнити ці два випадки дає можливість таке твердження.

Твердження 3 [3]. Нехай система обмежень (2)—(8) є сумісною, а штрафні коефіцієнти $P_{AA} = P_{AB} = \sum_{ij \in E_{AA}} d_{ij}^{AA} + \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB}$. Якщо $P^* = 0$, то (x^*, y^*, z^*) — розв'язок задачі (1)—(8), який задовольняє верхні межі на обсяги потоків по ребрах мережі. Якщо $P^* > 0$, то серед компонент векторів u^* та v^* є хоча б одна додатна компонента і задача (1)—(8) не має розв'язку, який задовольняє верхні межі на обсяги потоків у мережі.

Якщо значення штрафних коефіцієнтів вибрані не меншими, ніж у твердженні 3, то додатні компоненти векторів u^* та v^* визначають такі обсяги потоків, які потрібно додати до верхніх меж на обсяги потоків у мережі, щоб для них задача (1)—(8) мала розв'язок.

Два обчислювальні експерименти. Розглянуто тестовий приклад модельної електроенергетичної мережі з [1], параметри для якого наведено в табл. 1. Розв'язання відповідних задач оптимізації виконано за допомогою солвера Gurobi [5], який доступний на NEOS сервері [6]. Для опису ЛП-задач використано мову моделювання AMPL (A Mathematical Programming Language) [7].

Перший експеримент стосується дослідження розподілу потоків потужності та його ефективності (мінімальний момент потужності) для п'яти різних варіантів задачі (1)—(8), де потреби в потужності вузлів навантаження не змінюються, а змінюються лише потужності у вузлах живлення.

У першому варіанті задачі розглядається нормальне функціонування модельної електроенергетичної системи за даними табл. 1. Тут сумарна потужність у п'яти вузлах живлення та десяти вузлах навантаження є однаковою і становить $3100 \text{ МВ} \cdot \text{А}$, а потужності вузлів A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 дорівнюють відповідно $800, 700, 650, 500, 450 \text{ МВ} \cdot \text{А}$.

Другий варіант передбачає знеструмлення вузла живлення A_1 та збереження його працездатності, де потужність у $800 \text{ МВ} \cdot \text{А}$ розподіляється рівномірно по $200 \text{ МВ} \cdot \text{А}$ між вузлами A_2 (900), A_3 (850), A_4 (700), A_5 (650).

Третій варіант зводиться до визначення розподілу потоків потужності, якщо потужності вузлів A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 дорівнюють відповідно $500, 770, 340, 610, 880 \text{ МВ} \cdot \text{А}$. Тут сумарна потужність вузлів живлення становить $3100 \text{ МВ} \cdot \text{А}$, а потужності вузлів живлення вибрані так, щоб забезпечити найменший момент потужності модельної енергосистеми. Саме в цьому варіанті розподіл потоків потужності є найефективнішим завдяки мінімізації моменту потужності.

Четвертий варіант пов'язаний зі знеструмленням вузла живлення A_1 , але зі збереженням його працездатності та потужності вузлів A_2 (700), A_3 (650), A_4 (500), A_5 (450), як у першому варіанті.

Для п'ятого варіанта знеструмлюється вузол живлення A_2 , але зберігається його працездатність та потужності вузлів A_1 (800), A_3 (650), A_4 (500), A_5 (450) з першого варіанта.

Таблиця 2. Експеримент 1: розподіли потоків потужності в енергосистемі

ЛЕП	Верхня межа пропускної здатності	Довжина ЛЕП між вузлами	Варіант 1, $M^* = 40020$		Варіант 2, $M^* = 49790$		Варіант 3, $M^* = 36030$		Варіант 4, $M^* = 26590$		Варіант 5, $M^* = 29270$	
	x^{up}	d^{AA}	x^+	x^-	x^+	x^-	x^+	x^-	x^+	x^-	x^+	x^-
$A_1 A_2$	800	35	0	0	0	100	0	0	0	0	0	0
$A_2 A_3$	800	70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$A_3 A_4$	800	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$A_4 A_5$	800	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$A_5 A_1$	800	65	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	y^{up}	d^{AB}	y^+	y^-	y^+	y^-	y^+	y^-	y^+	y^-	y^+	y^-
$A_1 B_1$	180	13	180	0	70	0	70	0	0	0	180	0
$A_1 B_2$	180	7	180	0	90	0	180	0	0	0	180	0
$A_1 B_3$	180	9	180	0	40	0	180	0	0	0	180	0
$A_1 B_4$	180	15	180	0	70	0	70	0	0	0	100	0
$A_1 B_5$	180	20	80	0	0	170	0	0	0	0	160	0
$A_2 B_2$	180	12	180	0	180	0	180	0	180	0	0	0
$A_2 B_3$	180	15	180	0	180	0	180	0	180	0	0	0
$A_2 B_5$	180	5	80	0	180	0	160	0	160	0	0	0
$A_2 B_8$	180	20	80	0	80	0	70	0	0	0	0	0
$A_2 B_9$	180	15	180	0	180	0	180	0	180	0	0	0
$A_3 B_{10}$	180	11	170	0	180	0	70	0	180	0	180	0
$A_3 B_2$	180	22	140	0	180	0	90	0	130	0	130	0
$A_3 B_5$	180	15	0	0	150	0	0	0	0	0	0	0
$A_3 B_6$	180	20	160	0	160	0	0	0	160	0	160	0
$A_3 B_9$	180	6	180	0	180	0	180	0	180	0	180	0
$A_4 B_{10}$	180	10	80	0	70	0	180	0	70	0	70	0
$A_4 B_3$	180	25	40	0	180	0	40	0	0	0	0	0
$A_4 B_7$	180	18	70	0	140	0	70	0	110	0	70	0
$A_4 B_8$	180	6	170	0	170	0	180	0	180	0	180	0
$A_4 B_9$	180	17	140	0	140	0	140	0	140	0	180	0
$A_5 B_1$	180	7	70	0	180	0	180	0	180	0	70	0
$A_5 B_2$	180	17	130	0	180	0	180	0	0	0	50	0
$A_5 B_4$	180	3	70	0	180	0	180	0	180	0	150	0
$A_5 B_6$	180	18	0	0	0	0	160	0	0	0	0	0
$A_5 B_7$	180	13	180	0	110	0	180	0	90	0	180	0

Перший, другий та четвертий варіанти розглядалися в статті [1], а третій — у матеріалах конференції [2], де розрахунки було виконано за допомогою відповідних математичних моделей, сформульованих як задачі булевого лінійного програмування. У цій роботі справедливості отриманих результатів підтверджується за допомогою ЛП-задачі. П'ятий варіант розрахунку раніше не розглядався.

У табл. 2 для всіх п'яти варіантів наведено розподіли потоків потужності як між вузлами живлення, так і між вузлами живлення та вузлами навантаження, а також мінімальні моменти потужності (M^*). Тут у колонках " x^+ ", " x^- ", " y^+ ", " y^- " наведено розв'язки ЛП-задачі (1)—(8), а в колонках " x^{up} ", " y^{up} ", " d^{AA} ", " d^{AB} " — верхні межі пропускної здатності ребер та довжини ліній електропередачі між вузлами.

З табл. 2 видно, що для варіанта 2 є два "мінусові" потоки — $100 \text{ МВ} \cdot \text{А}$ від A_2 до A_1 та $170 \text{ МВ} \cdot \text{А}$ від B_5 до A_1 (їх значення виділено напівжирним шрифтом). Для інших варіантів "мінусові" потоки не виявлено.

Для варіанта 3 розподіл потоків потужності є найефективнішим ($M^* = 36030$), і кращого за мінімальним моментом потужності не існує, якщо потреби вузлів навантаження в потужності задоволені. Для варіантів 4 і 5 моменти потужності менші ($M^* = 26590$ та $M^* = 29270$), але для них не виконані потреби в потужності у вузлах навантаження. Це підтверджують дані табл. 3, де наведено потужності, які отримують десять вузлів навантаження. Тут напівжирним шрифтом виділено обсяги потужностей, яких бракує для задоволення потреб вузлів навантаження.

Таблиця 3. Експеримент 1: потужності у вузлах навантаження

Вузли	Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3	Варіант 4	Варіант 5
B_1	250 (0)	250 (0)	250 (0)	180 (70)	250 (0)
B_2	630 (0)	630 (0)	630 (0)	310 (320)	360 (270)
B_3	400 (0)	400 (0)	400 (0)	180 (220)	180 (220)
B_4	250 (0)	250 (0)	250 (0)	180 (70)	250 (0)
B_5	160 (0)	160 (0)	160 (0)	160 (0)	160 (0)
B_6	160 (0)	160 (0)	160 (0)	160 (0)	160 (0)
B_7	250 (0)	250 (0)	250 (0)	200 (50)	250 (0)
B_8	250 (0)	250 (0)	250 (0)	180 (70)	180 (70)
B_9	500 (0)	500 (0)	500 (0)	500 (0)	360 (140)
B_{10}	250 (0)	250 (0)	250 (0)	250 (0)	250 (0)

Таблиця 4. Експеримент 2: обсяги електроенергії у вузлах живлення

Вузли	Варіант 1, $M^* = 48930$	Варіант 2, $M^* = 50050$	Варіант 3, $M^* = 49250$	Варіант 4, $M^* = 51130$	Варіант 5, $M^* = 48230$
A_1	0	$820 = 800 + \mathbf{20}$	800	800	800
A_2	$880 = 700 + \mathbf{180}$	0	$790 = 700 + \mathbf{90}$	$800 = 700 + \mathbf{100}$	700
A_3	650	650	0	650	650
A_4	$690 = 500 + \mathbf{190}$	$750 = 500 + \mathbf{250}$	$750 = 500 + \mathbf{250}$	0	$950 = 500 + \mathbf{450}$
A_5	$880 = 450 + \mathbf{430}$	$880 = 450 + \mathbf{430}$	$760 = 450 + \mathbf{310}$	$850 = 450 + \mathbf{400}$	0

У другому експерименті досліджено розподіли потоків потужності та визначено критерій ефективності (мінімального моменту потужності) для п'яти різних варіантів знеструмлення вузлів живлення, коли потужності знеструмлених вузлів розподіляються між іншими задіяними вузлами модельної електроенергетичної системи. У варіанті 1 знеструмлюється вузол живлення A_1 , у варіанті 2 — вузол A_2 , у варіанті 3 — вузол A_3 , у варіанті 4 — вузол A_4 , у варіанті 5 — вузол A_5 (вузол живлення не може отримувати ненульові обсяги потужності, але через нього їх можна передавати).

Таблиця 5. Експеримент 2: розподіли потоків потужності в енергосистемі

ЛЕП	Верхня межа пропускної здатності	Довжина ЛЕП між вузлами	Варіант 1		Варіант 2		Варіант 3		Варіант 4		Варіант 5	
	x^{up}	d^{AA}	x^+	x^-	x^+	x^-	x^+	x^-	x^+	x^-	x^+	x^-
$A_1 A_2$	800	35	0	90	160	0	0	0	0	0	0	0
$A_2 A_3$	800	70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$A_3 A_4$	800	50	0	0	0	0	0	100	0	0	0	0
$A_4 A_5$	800	25	0	0	0	0	0	0	0	390	300	0
$A_5 A_1$	800	65	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	y^{up}	d^{AB}	y^+	y^-	y^+	y^-	y^+	y^-	y^+	y^-	y^+	y^-
$A_1 B_1$	180	13	70	0	70	0	180	0	180	0	180	0
$A_1 B_2$	180	7	90	0	180	0	180	0	180	0	180	0
$A_1 B_3$	180	9	40	0	180	0	180	0	180	0	180	0
$A_1 B_4$	180	15	70	0	70	0	100	0	180	0	180	0
$A_1 B_5$	180	20	0	180	160	0	160	0	80	0	80	0
$A_2 B_2$	180	12	180	0	90	0	180	0	180	0	180	0
$A_2 B_3$	180	15	180	0	40	0	180	0	180	0	180	0
$A_2 B_5$	180	5	180	0	0	180	180	0	80	0	80	0
$A_2 B_8$	180	20	70	0	70	0	70	0	180	0	80	0
$A_2 B_9$	180	15	180	0	140	0	180	0	180	0	180	0
$A_3 B_{10}$	180	11	130	0	110	0	70	0	180	0	130	0
$A_3 B_2$	180	22	180	0	180	0	90	0	130	0	180	0
$A_3 B_5$	180	15	160	0	180	0	0	180	0	0	0	0
$A_3 B_6$	180	20	0	0	0	0	0	20	160	0	160	0
$A_3 B_9$	180	6	180	0	180	0	140	0	180	0	180	0
$A_4 B_{10}$	180	10	120	0	140	0	180	0	70	0	120	0
$A_4 B_3$	180	25	180	0	180	0	40	0	40	0	40	0
$A_4 B_7$	180	18	70	0	70	0	70	0	70	0	180	0
$A_4 B_8$	180	6	180	0	180	0	180	0	70	0	170	0
$A_4 B_9$	180	17	140	0	180	0	180	0	140	0	140	0
$A_5 B_1$	180	7	180	0	180	0	70	0	70	0	70	0
$A_5 B_2$	180	17	180	0	180	0	180	0	140	0	90	0
$A_5 B_4$	180	3	180	0	180	0	150	0	70	0	70	0
$A_5 B_6$	180	18	160	0	160	0	180	0	0	0	0	0
$A_5 B_7$	180	13	180	0	180	0	180	0	180	0	70	0

Результати розрахунків для другого експерименту наведено в табл. 4 і 5: у табл. 4 — обсяги потужностей для вузлів живлення та мінімальні моменти потужності, які відповідають цим варіантам (напівжирним шрифтом виділено обсяги потужностей знеструмлених вузлів живлення, перерозподілені між іншими вузлами), у табл. 5 — розподіли потоків потужності між вузлами живлення та між вузлами живлення і навантаження.

З табл. 5 видно, що для варіанта 1 фіксуються два “мінусові” потоки ($90 \text{ МВ} \cdot \text{А}$ від A_2 до A_1 та $180 \text{ МВ} \cdot \text{А}$ від B_5 до A_1), для варіанта 2 — один “мінусовий” потік ($180 \text{ МВ} \cdot \text{А}$ від B_5 до A_1), для варіанта 3 — три “мінусові” потоки ($100 \text{ МВ} \cdot \text{А}$ від A_4 до A_3 , $180 \text{ МВ} \cdot \text{А}$ від B_5 до A_3 , $20 \text{ МВ} \cdot \text{А}$ від B_6 до A_3), а для варіанта 4 — один “мінусовий” потік ($390 \text{ МВ} \cdot \text{А}$ від A_5 до A_4). Для варіанта 5 “мінусові” потоки не виявлено, що забезпечує найменше значення моменту потужності $M^* = 48230$ серед усіх варіантів другого експерименту. Зауважимо, що варіанту 1 відповідає мінімальний момент потужності $M^* = 48930$, варіанту 2 — $M^* = 50050$, варіанту 3 — $M^* = 49250$, варіанту 4 — $M^* = 51130$.

За результатами тестування розробленого AMPL-коду підготовлено матеріали для державної реєстрації авторського права на комп’ютерну програму “AMPL-програма OEFD для оптимізації розподілу потоків електроенергії” (заявка С202607790 на реєстрацію авторського права на твір; зареєстр. 23.07.2026).

Висновки. Розроблено математичну модель для розрахунку різних варіантів роботи електроенергетичної системи з частковим знеструмленням окремих вузлів живлення електромережі. Модель сформульовано у вигляді задачі лінійного програмування, де мінімізується момент потужності енергосистеми з урахуванням пропускної здатності ліній електропередач і рівня навантаження енергетичних вузлів. Наведено результати розрахунків щодо розподілу потоків енергії та значення його ефективності (мінімальний момент потужності) для декількох варіантів функціонування модельної електроенергетичної системи з п’ятьма вузлами живлення та десятьма вузлами навантаження.

Розроблена математична модель може бути використана для балансування регіональних енергосистем за умов непередбачуваних пошкоджень енергетичної інфраструктури та виникнення при цьому некерованого дефіциту потужності [1]. За її допомогою можна знаходити оптимальні потікорозподіли в електроенергетичній мережі та виявляти критичні значення пропускних здатностей ребер, за яких передавання потоків стає неможливим. Це сприятиме прийняттю своєчасних управлінських рішень для систем диспетчеризації центрального та регіонального рівнів щодо формування адекватних реакцій та сценаріїв для забезпечення стійкості регіональних енергосистем [8].

Дослідження виконано за фінансової підтримки НАН України (проект 2.3/26-П “Розробити математичні моделі, методи та програмні засоби мінімізації ризиків для об’єктів критичної інфраструктури”, 0126U002032).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Kaplun V., Gai O., Stetsyuk P., Ivlichev A. Provision of optimal dispatching scenarios for regional power systems in the face of uncontrollable power shortages. *Machinery & Energetics*. 2023. **14**, № 2. P. 23—33. <https://doi.org/10.31548/machinery/2.2023.23>
2. Каплун В.В., Войтенко В.В., Стецюк П.І., Хом'як О.М. Балансування мікроенергосистем з адресним потокорозподілом потужності та мінімізацією втрат електроенергії. *Цифрові технології в енергетиці і автоматизації*: зб. тез доп. III міжнар. наук.-практ. конф. (Київ, 6 червня 2025). Київ, 2025. С. 23—24.
3. Стецюк П.І., Хом'як О.М. Оптимізаційні моделі балансування регіональної енергосистеми за умов знеструмування магістральних вузлів. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2025. № 6. С. 35—45. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.06.035>
4. Стецюк П.І., Хом'як О.М. Лінійна модель для оптимізації потокорозподілу регіональної енергосистеми. *Комбінаторні конфігурації та їхні застосування*: Матеріали XXVIII Міжнар. наук.-практ. сем. (Кропивницький, Запоріжжя, Київ, 7—9 травня 2026). Кропивницький: ПП “Ексклюзив-Систем”, 2026. С. 12—20.
5. Gurobi Optimization, Inc. Gurobi optimizer reference manual. 2014. URL: <https://www.gurobi.com/> (Дата звернення: 10.07.2026).
6. NEOS Server. URL: <https://neos-server.org/> (Дата звернення: 10.07.2026).
7. Fourer R., Gay D.M., Kernighan B.W. AMPL: A modeling language for mathematical programming. Belmont: Duxbury Press, 2003. 526 p.
8. Живучість та резильєнтність — 2023: збірник матеріалів міжнародної науково-практичної конференції (Київ, 19 жовтня 2023). Київ, 2023. 173 с.

Надійшла до редакції 30.07.2026

REFERENCES

1. Kaplun, V., Gai, O., Stetsyuk, P., & Ivlichev, A. (2023). Provision of optimal dispatching scenarios for regional power systems in the face of uncontrollable power shortages. *Machinery & Energetics*, 14, No. 2, pp. 23-33. <https://doi.org/10.31548/machinery/2.2023.23>
2. Kaplun, V. V., Voitenko, V. V., Stetsiuk, P. I. & Khomiak, O. M. (2025, June). Balancing micro-energy systems with targeted load flow allocation and minimization of electricity losses. *Proceedings of the 3rd International Scientific and Practical Conference Digital technologies in energy and automation* (pp. 23-25). Kyiv (in Ukrainian).
3. Stetsyuk, P. I. & Khomiak, O. M. (2025). Optimization models for balancing regional systems in scenarios involving main-node blackouts. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 6, pp. 35-46 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.06.035>
4. Stetsyuk, P. I. & Khomiak, O. M. (2026, May). Linear model for optimization of flow distribution of regional power system. *Proceedings of the XXVIII International Scientific and Practical Seminar Combinatorial configurations and their applications* (pp. 12-20). Kropyvnytskyi, Zaporizhzhia, Kyiv (in Ukrainian).
5. Gurobi Optimization, Inc. (2014). Gurobi optimizer reference manual. Retrieved from <https://www.gurobi.com/>
6. NEOS Server. Retrieved from <https://neos-server.org/>
7. Fourer, R., Gay, D. M. & Kernighan, B. W. (2003). AMPL: A modeling language for mathematical programming. Belmont: Duxbury Press.
8. Survivability and Resilience — 2023: Proceedings of the International Scientific and Practical Conference. Kyiv, 2023 (in Ukrainian).

Received 30.07.2026

P.I. Stetsyuk, <https://orcid.org/0000-0003-4036-2543>

O.M. Khomiak, <https://orcid.org/0000-0002-5384-9070>

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

E-mail: stetsyukp@gmail.com, khomiak@gmail.com

LINEAR MODEL OF POWER FLOW DISTRIBUTION IN REGIONAL POWER SYSTEM UNDER MAIN NODE OUTAGES

A mathematical model for minimizing the power moment of an electric power network has been developed. The model takes into account the transmission capacity of power lines, the power balance equations at main supply nodes and load nodes, the full utilization of the transmission capacity of supply nodes, and the disconnection of incoming power lines at selected main nodes. The mathematical model is formulated as a linear programming problem. The properties of the solution are established, as well as the necessary and sufficient conditions for the consistency of the system of linear constraints. It is shown that at the point of minimum power, the corresponding power flows are transmitted along the power lines in only one direction. The conditions under which the required power flows cannot be transmitted through the power system have been identified. Computational results of power flow distribution and its efficiency (minimum power moment) are presented for ten operating scenarios of a model regional power system consisting of five supply nodes and ten load nodes, under conditions where the incoming transmission lines of the supply nodes are disconnected. The proposed mathematical model can be applied to balancing regional power systems under unexpected damage to critical power infrastructure accompanied by uncontrollable power shortages.

Keywords: *supply nodes, load nodes, power flow distribution, power moment, linear programming problem, transmission line capacity, outages of main nodes.*