

УДК 004.942+519.816

Oleksii Sholokhov¹, associate professor

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-8676-3724> **e-mail:** gyroalex@ukr.net

Dmytro Diakon², postgraduate student

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-6826-7455> **e-mail:** dmitro.dyakon@gmail.com

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

²Institute of Telecommunications and Global Information Space of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

APPLICATION OF THE MARKOV MODEL IN INFORMATION TECHNOLOGY OF THE FORMATION OF THE LOCAL SOCIO-ECONOMIC SYSTEM

Abstract. *The methodology for using Markov models in information technology to support decision-making in the regional and local development management system under conditions of uncertainty is obtained. The organization of cooperation at the local and regional levels is today one of the urgent issues of ensuring national sustainability. After all, in conditions of territorial proximity with the joint use of available resources and infrastructure, forming a single economic environment, the unification of territorial communities (and/or individual cities or villages) into local socio-economic systems allows ensuring effective local development, capacity and sustainability of communities through cooperation, joint use of resources and the resulting synergistic effect from such interaction. Complex dynamic systems are formed, for which it is necessary to ensure the consistency of the interaction of their elements, taking into account competition, increasing load on infrastructure, development of information technologies, changes in the planning of settlements, location of production, etc.*

To solve the above problems, the work proposes to use Markov models, models of mass service systems. Based on the fact that most territorial communities have a formed sectoral structure, social sphere facilities, transport highways, etc., the work considers the problem of optimal management of the existing mass transit system. The advantages of using mass transit system models are that their use allows you to take into account the specifics of inter-sectoral interaction at the local and regional levels, to assess the quality of management, having previously found out whether certain influences are available for the system under study. The developed models, methods, algorithms are intended for use in information technology to support decision-making in the system of state and public administration. Its implementation will increase the quality and efficiency of management decisions by optimizing analytical processes.

Keywords: *information technology, Markov models, decision support system, simulation modeling, socio-economic system.*

© О.В. Шолохов, Д.В. Дякон, 2025

О.В. Шолохов¹, Д.В. Дякон²

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ, Україна

²Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, м. Київ, Україна

ЗАСТОСУВАННЯ МАРКОВСЬКОЇ МОДЕЛІ У ІНФОРМАЦІЙНІЙ ТЕХНОЛОГІЇ ФОРМУВАННЯ ЛОКАЛЬНОЇ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Анотація. В статті представлена методика використання марковських моделей у інформаційній технології підтримки прийняття рішень у системі управління регіональним та місцевим розвитком в умовах невизначеності. Організація співробітництва на місцевому та регіональному рівнях сьогодні є одним із актуальних питань забезпечення національної стійкості. Адже в умовах територіальної близькості за спільного використання наявних ресурсів та інфраструктури, утворюючи єдине економічне середовище, об'єднання територіальних громад (та/або окремих міст чи сіл) у локальні соціально-економічні системи дозволяє забезпечити ефективний місцевий розвиток, спроможність та стійкість громад за рахунок кооперації, спільного використання ресурсів та отримуваного синергетичного ефекту від такої взаємодії. Формуються складні динамічні системи, для яких необхідно забезпечити узгодженість взаємодії їх елементів, враховуючи конкуренцію, зростання навантаження на інфраструктуру, розвиток інформаційних технологій, зміни у плануванні населених пунктів, розміщенні виробництва тощо.

Для розв'язання вказаних задач у роботі запропоновано використовувати марковські моделі, моделі систем масового обслуговування. Виходячи з того, що більшість територіальних громад мають сформовану галузеву структуру, об'єкти соціальної сфери, транспортні магістралі тощо, в роботі розглядається задача оптимального керування наявною системою масового обслуговування. Перевагами застосування моделей систем масового обслуговування є те, що їх використання дозволяє врахувати специфіку міжгалузевої взаємодії на локальному та регіональному рівнях, оцінити якість керування, попередньо з'ясувавши, чи доступні певні впливи для досліджуваної системи. Розроблені моделі, методи, алгоритми призначені для використання у інформаційній технології підтримки прийняття рішень у системі державного та публічного управління. Її впровадження підвищить якість та оперативність управлінських рішень за рахунок оптимізації аналітичних процесів.

Ключові слова: інформаційна технологія, марковські моделі, система підтримки прийняття рішень, імітаційне моделювання, соціально-економічна система.

<https://doi.org/10.32347/2411-4049.2025.4.186-200>

Вступ

Задача формування ефективних механізмів сталого розвитку через об'єднання ресурсів, спільні інвестиційні проекти та модернізацію інфраструктури тощо визначена як одна з пріоритетних задач регіонального розвитку в рамках проекту Ради Європи «Посилення багаторівневого врядування та місцевої демократії для підтримки відновлення України» [1].

Саме така організація співробітництва на місцевому та регіональному рівнях [2, 3] стає сьогодні одним із головних інструментів забезпечення національної стійкості.

За рахунок забезпечення взаємодії економічних, соціальних, екологічних, управлінських та інфраструктурних компонентів в умовах територіальної близькості, такі системи забезпечують ефективний місцевий розвиток, спроможність та стійкість громад за рахунок кооперації, спільного використання ресурсів та отриманого синергетичного ефекту від взаємодії. Обґрунтування адміністративно-територіального складу локальних соціально-економічних систем, визначення їх оптимальної галузевої структури, інфраструктурних рішень є складними задачами, що потребують розроблення відповідного математичного апарату, адаптованого до використання у інформаційних технологіях, призначених для систем підтримки прийняття рішень в управлінні регіональним та місцевим розвитком.

Тому, тема даного дослідження є актуальною, має наукове та практичне значення, обумовлює необхідність проведення подальших досліджень в цьому напрямку.

Метою дослідження є розроблення інформаційної технології підтримки прийняття рішень щодо обґрунтування оптимального складу локальних соціально-економічних систем, основу якої становлять математичні та комп'ютерні моделі.

Особливістю пропонованої інформаційної технології є те, що у процесі побудови моделей, дослідження здійснюється у декілька етапів, поступово змінюючи рівень деталізації, імітуючи поведінку системи, виявляючи нові проблеми розвитку та зовнішні і внутрішні фактори, що спричиняють їх, покращуючи таким чином отримувані результати.

Наукова новизна полягає у поєднанні оптимізаційної багатокритеріальної моделі формування локальної соціально-економічної системи (ЛСЕС) з керованою марковською моделлю, що дозволяє формалізувати процес трансформації галузевої структури до цільової, забезпечивши узгоджене використання потоків ресурсів в умовах невизначеності.

Для досягнення мети вирішено такі завдання:

- проаналізовані сучасні підходи щодо формування локальних соціально-економічних систем, їх особливості та підходи забезпечення їх сталого розвитку;
- побудовано моделі досліджуваних процесів з урахуванням впливу різних груп чинників з метою прогнозування їх розвитку для підтримки прийняття відповідних управлінських рішень;
- на основі системного підходу побудовано та реалізовано інформаційну технологію розв'язання задач моделювання та прогнозування сталого розвитку локальних соціально-економічних систем для її подальшого використання у відповідних системах підтримки прийняття рішень.

Теоретичні основи дослідження

Позитивні зрушення у регіональному розвитку України, відзначені у звіті Європейської Комісії [4], є результатом спільної роботи державної влади та місцевого самоврядування щодо розроблення власних та впровадження кращих світових практик та інструментів забезпечення сталого розвитку. Вже

зроблені активні кроки для забезпечення системності підтримки цифрового розвитку місцевого самоврядування [5], посилення його аналітичного забезпечення. Зокрема, впроваджується методика класифікації територій NUTS – ухвалені перелік та вимоги до показників, за якими українські громади буде віднесено до різних функціональних типів територій [6]. Змінюються підходи до планування та стратегування розвитку регіонів, громад та територій. Вже з листопада 2025 року в Україні розпочато проєкт міжнародної технічної допомоги «Управління місцевими фінансами для відновлення та відбудови громад» [7], метою якого є допомогти громадам перейти від управління доходами до планування видатків. Реалізація цього підходу передбачає формування системи управління розвитком громад та територій, спрямованої на забезпечення власної, внутрішньої спроможності, підвищення ефективності використання наявних ресурсів, залучення інвестицій та створення умов для їх підтримання, збалансованого економічного розвитку територій. Тобто, має застосовуватись комплексний (інтегрований) підхід до управління місцевим та регіональним розвитком, який в сучасних умовах більше відповідає концепції сталого розвитку, ніж галузевий, адже його застосування дозволяє узгодити цілі регіональної політики, місцевого самоврядування, пріоритети населення та бізнесу відповідно до спільного бачення майбутнього певних територій. Концепція комплексного (інтегрованого) розвитку [8] означає, що кожний рівень соціально-економічної системи країни, кожна галузь зберігають свої акценти і спільно досягають синергетичного ефекту від взаємодії та територіальної близькості. Тобто, формуються складні динамічні системи – об'єднання розташованих просторово близько територіальних громад, населених пунктів, районів тощо, для спільного використання потоків виробничих ресурсів, інформаційного простору, економічного середовища тощо. Тому, необхідно забезпечити узгодженість спільного використання ресурсів, враховуючи конкуренцію, зростання навантаження на інфраструктуру, розвиток інформаційних технологій, зміни у плануванні населених пунктів, розміщенні виробництва тощо. Для розв'язання вказаних задач пропонується використовувати моделі систем масового обслуговування. Ці моделі, як зазначають фахівці [9-12], є перспективним напрямом досліджень у галузі регіонального управління, оскільки їх використання забезпечує обґрунтування утворення та розвитку соціально-економічних систем різних типів в умовах невизначеності, спричиненої військовою агресією, та структурно-динамічних змін внаслідок інтеграції до європейського простору.

Результати дослідження

Зокрема, задачі формування галузевої та територіальної структури ЛСЕС, узгодження обміну ресурсами, використання інфраструктури тощо можна представити у вигляді марківських моделей систем масового обслуговування (СМО) (марківського процесу) з дискретним часом: $n = 0, 1, \dots$ [13].

Зауважимо, що для оптимізації процесу обслуговування така СМО має бути керованою. Специфікуємо це поняття. Отже, СМО, як об'єкт дослідження в цілому і окремих її частин, що визначають певний марковський процес, містить наступні складові: вхідний потік вимог; власне структуру СМО;

алгоритм обслуговування вимог з певними витратами часу на обслуговування включно з часом перебування вимоги у системі; дисципліну обслуговування. Кожна складова залежить від одного або більше параметрів. Якщо хоча б один параметр навіть однієї складової піддається бажаній зміні, таку систему і будемо надалі звати керованою [14]. Критеріїв якості керування може бути багато, але ж не всі з них розв'язувані навіть чисельно. Також треба з'ясувати, чи доступні нам певні впливи, а потім формулювати критерій. Слід відмітити, що задачі керування та синтезу СМО різні і, з огляду на те, що більшість фізичних об'єктів перебудовувати вкрай небажано, то актуальною є задача власне оптимального керування наявною СМО, що відбиває певний фізичний об'єкт. Тому, саме такий підхід було реалізовано у розроблюваній інформаційній технології.

Схема застосування пропонованої інформаційної технології представлена на рис. 1.



Рис. 1. Інформаційна технологія обґрунтування рішень щодо формування локальних соціально-економічних систем

Локальну соціально-економічну систему розглядатимемо з точки зору системи масового обслуговування, коли між елементами системи здійснюється обмін ресурсами: виробничими, трудовими, інвестиційними, спільно використовується соціальна та транспортна інфраструктури.

Розглянемо керовану одноканальну СМО з пуассоновим вхідним потоком з $\lambda > 0$ і сталим часом обслуговування $c > 0$. Довжина черги k обмежена $K > 0$. Керуванням вважається прийняття-неприйняття на обслуговування

чергової вимоги у момент її постановки у чергу. Неприйнята вимога втрачається, прийнята вимога стає в чергу і починає обслуговуватись щойно звільняється прилад, що обслуговує. Прийнята на обслуговування вимога дає дохід $d > 0$ і спричиняє збитки, пропорційні часу $T = k\Delta t$ перебування її у черзі, що виражаються добутком коефіцієнта втрат $r > 0$ на час перебування її у черзі – $T \cdot r$. Зрозуміло, що будь-яка вимога, яка очікує в черзі, має тим меншу прибутковість, чим далі вона від входу. Вираз $K < truncate\left(\frac{d}{r \cdot c}\right)$ дає

необхідне обмеження на довжину черги, що забезпечує дохідність останньої у черзі вимоги. Сукупний дохід розглянутої СМО від обслуговування накопиченої черги складатиме $d(k) = k \cdot d - \frac{c \cdot r(1+k)k}{2}$, $k < K$.

Максимальний дохід від черги при $k = K$ у разі натурального $d / (r \cdot c)$ складатиме $d(K) = \frac{d(d - r \cdot c)}{2 \cdot r \cdot c}$.

У випадку детермінованого надходження вимог чергу не утворюють або утворюють не більше, ніж $k = 1$. У разі, якщо вимоги надходять у нашу СМО частіше, ніж одна вимога за час обслуговування c , то їм відмовлятимуть. Одну вимогу ставлять у чергу на обслуговування з настанням умови $c - t \leq \Delta t_{input}$ – коли час, що залишився на обслуговування вимоги, яка як раз обслуговується, стає менше інтервалу часу Δt_{input} , з яким у СМО приходить нова вимога. Оскільки вимоги у СМО надходять з випадковим інтервалом часу за розподілом Пуассона з інтенсивністю $\lambda > 0$, то статична стратегія повної відмови від черги може спричинити простій СМО без роботи, який зменшить дохід від експлуатації СМО порівняно з більшим завантаженням СМО за рахунок утворення черги, хоча і з відповідною сплатою штрафу. Необхідно знайти *стратегію* R прийняття вимог на обслуговування, яка максимізує очікуваний середній дохід за одиницю часу за умови нескінченної тривалості функціонування СМО. Стратегія утворюється на підставі закону надходження вимог і вимірюваних інтервалів часу між вимогами.

Покладемо, що рішення приймаються відразу у момент надходження вимоги у СМО. Стан СМО фіксується у момент надходження до неї n -ї вимоги (тобто, в момент часу n). Станом СМО назвемо пару (k, t) , де k – число вимог, що знаходяться у СМО, t – час, що пройшов з початку обслуговування вимоги, яка займає прилад у даний час.

Позначимо a_0 – рішення не приймати вимогу, що щойно надійшла, на обслуговування, a_1 – брати. Тоді СМО є керованим марковським процесом з дискретним часом. А досліджувану локальну соціально-економічну систему розглядатимемо як систему масового обслуговування.

Нехай, X і A у загальному випадку є деякими повними сепарабельними метричними просторами, що складаються з елементів x і a , відповідно. У дискретному випадку X і A є зліченими множинами фазового простору

станів СМО і керування СМО, що складаються з елементів x_n і a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ відповідно. $\mathbf{B}$ і $\mathbf{A}$ – σ -алгебри борелевських підмножин X і A відповідно.

F – відображення, що зіставляє кожному $x \in X$ деяку непусту замкнену множину $A_x \subseteq A$ так, що множина $\Delta = \{(x, a) : x \in X, a \in A_x\}$ вимірна за Борелем у добутку $X \times A$.

Розглянемо дискретну керовану СМО. Слід зазначити, що необхідною умовою придатності моделі дискретній СМО для практичного застосування є скінченність множин X і A , хоча елементи цих множин та їх кількість потребують визначення. Надалі називатимемо такі СМО «практичним випадком».

Нехай у момент часу n СМО знаходиться у стані $x_n \in X$ і у момент настання цього стану обирається керування $a_n \in A$. Основне припущення стосовно ймовірнісної еволюції керованої дискретної СМО полягатиме у наступному:

$$P\{x_{n+1} \in B \mid x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, x_n = x, a_n = a\} = P(B \mid x, a), \quad (1)$$

де $B \in \mathbf{B}$ – довільна борелева множина, $P(B \mid x, a)$ – при фіксованих x, a ($(x, a) \in \Delta$) ймовірнісна міра $(X, \mathbf{B})$, а при фіксованій $\mathbf{B}$ – вимірна за Борелем функція на Δ .

Допустимою стратегією R для керованої дискретної СМО є послідовність $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n, \dots)$, де $\pi_n(\square x_0, a_0, \dots, a_n, x_n)$ – ймовірнісна міра на $(A, \mathbf{A})$ зосереджена на A_{x_n} і вимірним чином залежна від $h_n = (x_0, a_0, \dots, a_n, x_n)$ – історії керованої системи до моменту n , $h_n \in \underbrace{\Delta \times \Delta \times \dots \times \Delta}_n \times X$. $\pi_n(\square x_0, a_0, \dots, a_n, x_n)$ задає рандомізоване правило вибору керування $a_n \in A$ на підставі h_n . Стратегія R буде марковською, якщо $\pi_n(\square x_0, a_0, \dots, a_n, x_n) = \pi_n(\square x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Марківська стратегія R є стаціонарною, якщо $\pi_n(\square x_n) = \pi(\square x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Марківська стратегія R є стаціонарною нерандомізованою, якщо міра $\pi_n(\square x)$ вироджена для будь-якого $x \in X$.

Стаціонарна нерандомізована стратегія R ототожнюється з борелевською функцією $R(x)$, що задає $X \rightarrow A$ так, що для будь-якого $\forall x \in X : R(x) \in A_x$.

Позначимо $\mathfrak{R}$ – клас усіх допустимих стратегій, $\mathfrak{R}_0$ – клас стаціонарних нерандомізованих (детермінованих) стратегій.

В загальному випадку неможливо стверджувати існування хоча б однієї допустимої стратегії.

Умови існування стратегії, що належить $\mathfrak{R}_0$, менш суворі. Отже, щоб клас $\mathfrak{R}_0$ був не порожнім, необхідно існування вимірності відображення $F: x \rightarrow A_x$, $x \in X$, такого, що $\forall x \in X \exists F(x) \subseteq A, F(x) \neq \emptyset$ і $\{x: F(x) \cap E \neq \emptyset\} \in \mathbf{B}$, де E – відповідно відкрита, замкнена або борелева множина в A .

В подальшому припускаємо, що відображення $F: x \rightarrow A_x$, $x \in X$ є вимірним. У випадку $A_x \equiv A$ відображення F є вимірним і клас $\mathfrak{R}_0$ співпадає з множиною всіх борелевських функцій, які відображають X в A .

Визначення стратегії R означає визначення випадкового процесу, який, взагалі кажучи, не є марковським, не дивлячись на представлення (1), оскільки вибір рішення у будь-який момент часу $x \in X$ може залежати від усієї історії h_n . Назвемо такий процес керованим стратегією R випадковим процесом. Якщо стратегія марковська (стаціонарна), то керований процес є марковським (однорідним марковським).

Якщо ввести поняття доходу d , пов'язаного з керованим процесом, то можна сформулювати критерій оптимальності стратегії керування. Наприклад, якщо у стані $x \in X$ прийнято керування $a \in A_x$, то очікуваний дохід за один крок дорівнюватиме $r(x, a)$. Вважатимемо, що функція $r(x, a)$ вимірювана за Борелем і обмежена на Δ :

$$|r(x, a)| < L < \infty, (x, a) \in \Delta. \quad (2)$$

Надалі набір $\{X, A, \{A_x\}, P, r\}$ визначатиме керовану марковську модель з дискретним часом.

Розглянемо два наступні критерії якості керування:

$$1. \psi_\beta(x, R) = M_x^R \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n r(x_n, a_n), 0 < \beta < 1,$$

$$2. \varphi(x, R) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} M_x^R \sum_{k=0}^n r(x_k, a_k).$$

M_x^R – умовне математичне сподівання, яке відповідає процесу, керованому стратегією R за умови $x_0 = x$.

Стратегія R^* оптимальна відносно критерію 1, якщо $\psi_\beta(x, R^*) = \sup_{R \in \mathfrak{R}_0} \psi_\beta(x, R)$, $x \in X$.

Надалі критерій 1 зватимемо Ψ -критерієм, а оптимальну стратегію для нього – Ψ -оптимальною стратегією R_Ψ^* .

Стратегія R^* оптимальна відносно критерію 2, якщо $\varphi(x, R^*) = \sup_{R \in \mathfrak{R}_0} \varphi(x, R)$, $x \in X$.

Надалі критерій 2 зватимемо φ -критерієм, а оптимальну стратегію для нього – φ -оптимальною стратегією R_φ^* .

Достатні умови існування стаціонарних нерандомізованих φ -оптимальних стратегій R_φ^* даються теоремою [15].

Нехай існують постійна g і обмежена борелева функція $v(x)$ на X такі, що

$$g + v(x) = \sup_{a \in A_x} \left\{ r(x, a) + \int_X v(y) P(dy | x, a) \right\}, x \in X. \quad (3)$$

Тоді

$$\sup_{R \in \mathfrak{R}_0} \varphi(x, R) \leq g, x \in X. \quad (4)$$

Якщо при цьому

$$g + v(x) = \max_{a \in A_x} \left\{ r(x, a) + \int_X v(y) P(dy | x, a) \right\}, x \in X, \quad (5)$$

і для деякої стратегії $R^* \in \mathfrak{R}_0$

$$g + v(x) = r(x, R^*(x)) + \int_X v(y) P(dy | x, R^*(x)), x \in X, \quad (6)$$

тоді стратегія R^* – φ -оптимальна і

$$\varphi(x, R^*) \equiv g. \quad (7)$$

Для визначення конструктивного методу пошуку φ -оптимальної стратегії в класі $\mathfrak{R}_0$ необхідно ввести наступні припущення:

Припущення 1. Існує невід’ємна міра μ на $(X, \mathbf{B})$, така, що:

- 1) $\mu(B) \leq P(B | x, a)$, $(x, a) \in \Delta$, $B \in \mathbf{B}$,
- 2) $\mu(X) > 0$,

яке виконається, зокрема, якщо існує такий стан $x^* \in X$, що має місце

$$P(\{x^*\} | x, a) \geq \alpha > 0, (x, a) \in \Delta.$$

Тобто, у якості μ можна взяти міру, зосереджену у $\{x^*\}$ з масою α .

Припущення 2. Існує послідовність $\{\beta_n\} \uparrow 1$, деяка фіксована точка $z \in X$ і число $N < \infty$ такі, що функція

$$|\nu_{\beta_n}(x)| = |\psi_{\beta_n}(x) - \psi_{\beta_n}(z)| < N, n = 1, 2, \dots$$

Достатні умови існування в класі $\mathfrak{R}_0$ φ -оптимальної стратегії можна отримати з ψ -критерію у випадку $A_x \equiv A$, де A – скінченна або компактна множина.

Нехай A – скінченна множина і виконується *Припущення 1*. Тоді для будь-якого $0 < \beta < 1$ в класі $\mathfrak{R}_0$ існує φ -оптимальна стратегія R_β і максимальний дохід $\psi_\beta(x, R_\beta)$ буде єдиним розв'язком рівняння [16]

$$\psi_\beta(x) \max_{a \in A} \left\{ r(x, a) + \beta \int_X \psi_\beta(y) P(dy | x, a) \right\} \quad (8)$$

Нехай A – компактна множина, функція $r(x, a)$ напівніперервна зверху на $X \times A$ і перехідна ймовірність $P(\cdot | x, a)$ слабо неперервна по x, a і виконується *Припущення 1*. Тоді для будь-якого $0 < \beta < 1$ в класі $\mathfrak{R}_0$ існує ψ -оптимальна стратегія R_β і максимальний дохід $\psi_\beta(x, R_\beta)$ буде єдиним розв'язком рівняння (8) [17].

Нехай X – компакт, A – скінченна множина, виконується *Припущення 2*, функція $r(x, a)$ неперервна по $x, \forall a \in A$, $\theta(X | x, x', a) \rightarrow 0, \forall a \in A$, де $\theta(\cdot | x, x', a)$ – повна варіація міри $Q(\cdot | x, x', a) = P(\cdot | x, a) - (\cdot | x', a)$. Тоді в класі $\mathfrak{R}_0$ існує φ -оптимальна стратегія.

Для скінченного фазового простору станів існує наступний результат [14].

Нехай A – зліченна множина, X – компактна множина, виконується *Припущення 2*, функція $r(x, a)$ неперервна по $a, \forall x \in X$, $\sum_{y \in X} |P(\{y\} | x, a) - P(\{y\} | x, a')| \rightarrow 0, a' \rightarrow a, x \in X$. Тоді в класі $\mathfrak{R}_0$ існує φ -оптимальна стратегія.

Деякі послаблення достатніх умов існування оптимальних стаціонарних стратегій для керованих марковських процесів можна знайти в [18].

У даній роботі розглядається керована одноканальна система масового обслуговування (СМО) з пуассоновим вхідним потоком з $\lambda > 0$ і сталим часом обслуговування $t_{\text{srv}} > 0$. Довжина черги обмежена $l_q > 0$. Керуванням вважається прийняття-неприйняття на обслуговування чергової вимоги у момент її постановки у чергу. Неприйнята вимога втрачається, прийнята

вимога стає в чергу і починає обслуговуватись, щойно звільняється прилад, що обслуговує. Прийнята на обслуговування вимога дає дохід $\text{inc} > 0$ і несе збитки, пропорційні часу перебування вимоги у черзі, що виражаються коефіцієнтом $w_q > 0$. Необхідно знайти стратегію прийняття вимог на обслуговування, яка максимізує очікуваний середній дохід за одиницю часу за умови нескінченної тривалості функціонування СМО.

$$X = \{(0, 0)\} \cup \{1, 2, \dots, K\} \times [0, c); \quad (9)$$

$$A = \{a_0, a_1\}; \quad (10)$$

$$A(k, t) = A, \text{ if } (k, t) \in X, k \leq K$$

$$A(k, t) = \{a_0\}, \text{ if } k \geq K + 1 \quad ; \quad (11)$$

$$P(\{k\} \times [t, \tau) | (k, t), a_0) = 1 - e^{-\lambda(\tau-t)}, (k, t) \in X, k > 0, t < \tau \leq c; \quad (12)$$

$$P(\{k-i\} \times [p, \tau) | (k, t), a_0) = e^{-\lambda(ic-t)} [1 - e^{-\lambda\tau}],$$

$$(k, t) \in X, k > 0, i = 1, 2, \dots, k-1, t < \tau \leq c \quad (13)$$

$$P(\{0, 0\} | (k, t), a_0) = e^{-\lambda(kc-t)}, (k, t) \in X; \quad (14)$$

$$P(B | (k, t), a_1) = P(B | (k+1, t), a_0), (k, t) \in X, k \leq K; \quad (15)$$

$$r((k, t), a_0) = 0, \text{ if } i = 0, (k, t) \in X$$

$$r((k, t), a_0) = d - r(kc - t), \text{ if } i = 1, (k, t) \in X, k \leq K \quad (16)$$

З формул (14), (15) випливає, що

$$P(\{0, 0\} | (k, t), a) \geq e^{-\lambda(K+1)c} = a > 0, \quad (k, t) \in X, a \in A_{(k, t)} \quad i$$

ймовірність переходу задовольняє припущенню існування невід'ємної міри μ з масою a на $(X, \mathbf{B})$ такої, що $\mu(X) > 0$ і $\mu(B) \leq P(B | x, a)$,

$(x, a) \in \Delta$, $B \in \mathbf{B}$. Тоді існує φ -оптимальна стратегія $R_\varphi^* \in \mathfrak{R}_0$. Рівняння φ -оптимальності можна розв'язати методом послідовних наближень.

Для побудови моделі скористаємось [19, 20]. Графічно імітаційна модель СМО представлена на рис. 2.

Оскільки існування і єдиність розв'язку рівняння (8) доведено, то його пошук можна здійснити за допомогою ітераційного методу Ховарда [21], реалізувавши його сучасними програмними методами [22], а саме, в заданому діапазоні шукаємо обмеження на чергу на кожному кроці моделювання, яке, відповідно, дає максимум на нескінченному проміжку часу і на кожному кроці передається у модель (рис. 3).

Оскільки нескінченне моделювання неможливо, крім того, практичний випадок також обмежений у часі, то приймаємо моделювання у тривалому, але обмеженому часі як нескінченне. Бачимо, що у випадку застосування оптимальної стратегії у абсолютної кількості було обслуговано майже та ж кількість вимог, що і для неоптимальної стратегії. Але для збільшення прибутковості, СМО має зменшувати довжину черги.

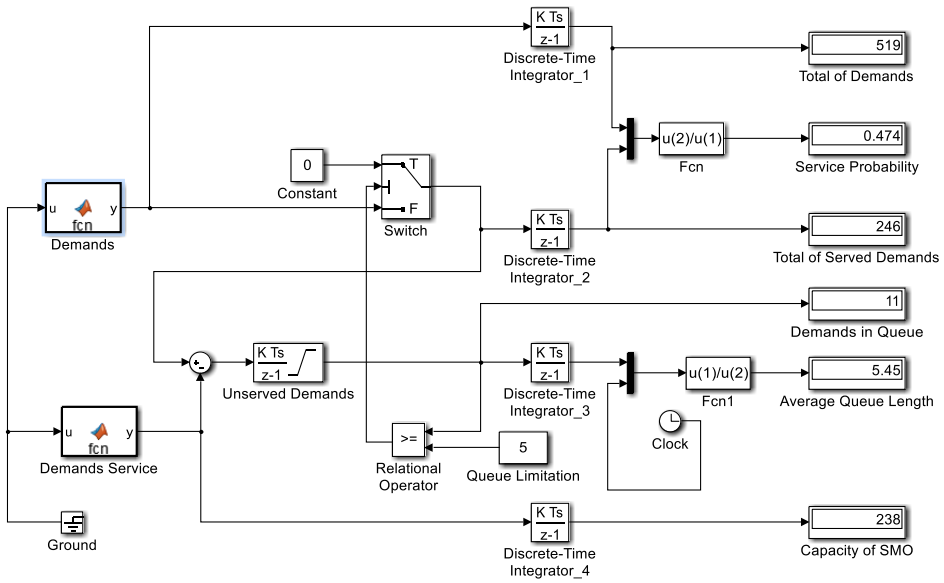


Рис. 2. S-модель СМО з дискретним кроком без оптимальної стратегії

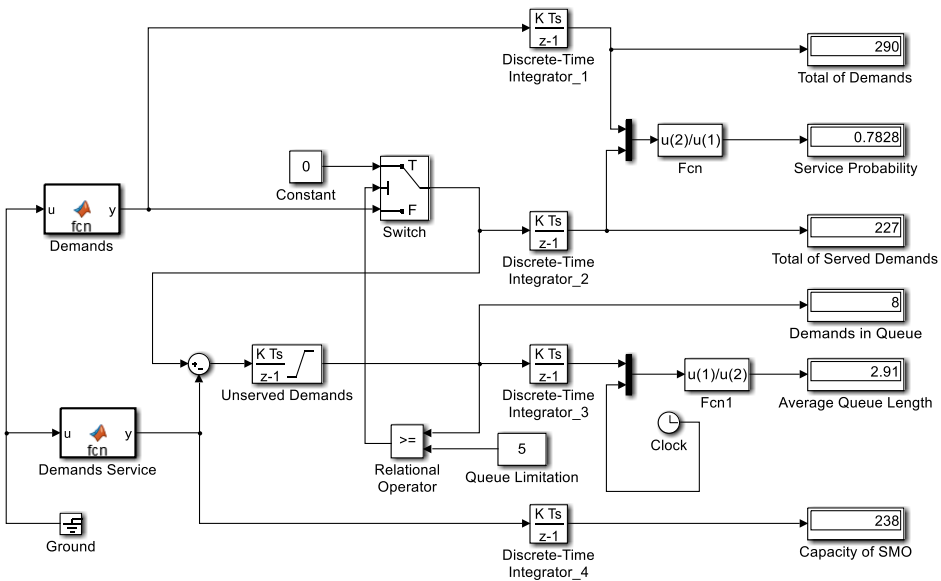


Рис. 3. S-модель СМО з дискретним кроком з оптимальною стратегією

Висновки та перспективи подальших досліджень

В результаті дослідження розроблено інформаційну технологію, основу якої становлять математичні та комп'ютерні моделі, призначені для використання у системах підтримки прийняття рішень в управлінні регіональним (або місцевим) розвитком. Використання запропонованої інформаційної технології у складі відповідних систем підтримки прийняття рішень для планування та

прогнозування регіонального та місцевого розвитку дозволить активніше та раціональніше використовувати наявний місцевий виробничий та ресурсний потенціал за рахунок кооперації та інтеграції виробництва, спільного використання соціальної, транспортної, інформаційно-телекомунікаційної інфраструктури. Використання розробленої інформаційної технології дозволить оптимізувати, наприклад, спільне використання складських приміщень, пунктів зберігання та сушіння зерна, медичних закладів тощо. Досягнення переваг забезпечуватиметься за рахунок оброблення заявок у практично замкненому господарському (або соціальному) комплексі локальної соціально-економічної системи, як-то збір урожаю, логістика перевезень різними видами транспорту, обмін виробничими ресурсами у процесі виготовлення продукції. В даній роботі розглянуто оброблення заявок за умови їх надходження за пуассонівським розподілом і те, що процес марковський. В подальших дослідженнях перспективним напрямом є ускладнення моделі, а саме – її багатоканальності та деяких відступів від марковості процесу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Проект Ради Європи «Посилення багаторівневого врядування та місцевої демократії для підтримки відновлення України». <https://rm.coe.int/ukr-3926-project-leaflet/1680b6650d>
2. План дій Ради Європи для України на 2023-2026 роки «Стійкість, відновлення та відбудова». <https://rm.coe.int/action-plan-ukraine-2023-2026-ukr/1680aa8282>
3. *Громади під тиском війни: співпраця, міжнародна підтримка та фінансова стійкість. Дані моніторингу від Мінрозвитку*. Децентралізація. <https://decentralization.ua/news/20100>
4. Commission staff working document. Ukraine 2025 Report. <https://eu-ua.kmu.gov.ua/wp-content/uploads/EU-enlargement-.pdf>
5. *Добре багаторівневе врядування, регіональна політика, реформа РІМ та розвиток екосистеми DREAM*. Міністерство розвитку громад та територій України. <https://mindev.gov.ua/news/dobre-bahatorivneve-vriaduvannia-rehionalna-polityka-reforma-pim-ta-rozvytok-ekosystemy-dream>
6. Про затвердження Статистичної класифікації територіальних одиниць України (NUTS-UA). Наказ Державної служби статистики України № 216 (2025). Україна. <https://stat.gov.ua/uk/page-contents/nakaz-vid-01122025-no-216>
7. *Проект міжнародної технічної допомоги «Управління місцевими фінансами для відновлення та відбудови громад» (Fiscal Governance for Local Reconstruction and Recovery)*. Децентралізація. <https://decentralization.gov.ua/news/20167>
8. Порядок формування Концепції інтегрованого розвитку території територіальної громади. Наказ Міністерства розвитку громад та територій України № 172. (2022). Україна. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1421-22#Text>
9. Артеменко, А. (2025). Моделювання стану кластерних структур за допомогою моделей системи масового обслуговування. *Економіка та суспільство*, 73. <https://doi.org/10.32782/2524-0072/2025-73-46>
10. Некрасова, Л.А. (2019). *Теоретико-методологічні засади стратегування розвитку виробничих підприємств в умовах децентралізації*. Schweinfurt: Time Realities Scientific Group UG (haftungsbeschränkt). <https://economics.net.ua/files/scientific-base/monogr/Nekrasova.pdf>
11. Гольдінер, Д. І. (2024). *Метод та моделі оптимізації систем масового обслуговування з використанням технології пріоритезації вхідного потоку заявок : дис. ... д-ра філософії*. Харків: Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. <https://openarchive.nure.ua/entities/publication/fb847475-7736-42a8-a0c9-d12d0cfacab4>

12. Mass transit systems <https://www.studysmarter.co.uk/explanations/architecture/urban-studies-in-architecture/mass-transit-systems/>
13. Жерновий, Ю. В. (2004). *Марковські моделі масового обслуговування: тексти лекцій*. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка.
14. Андреев, М. В. (2015). *Оптимізація стохастичних процесів: керовані марковські та напівмарковські моделі: навчальний посібник*. Київ: ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ».
15. Taylor, H. M. (1966). Markovian sequential replacement processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, 36 (6), 1677-1694. <https://www.jstor.org/stable/2239109>
16. Blackwell, D. (1965). Discounted Dynamic Programming. *The Annals of Mathematical Statistics*, 36 (1), 226-235. <https://www.jstor.org/stable/2238089>
17. Maitra, A. (1968). Discounted Dynamic Programming on Compact Metric spaces. *Sankhyā. the Indian Journal of Statistics, Series A.* 30 (2), 211-216. <https://www.jstor.org/stable/25049530>
18. Feinberg, T. A., Kasyanov, P. O. & Zadoianchuk, N. V. (2012). Average Cost Markov Decision Processes with Weakly Continuous Transition Probabilities. *Journal Mathematics of Operation Research*, 37 (4), 591-607. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1202.4122>
19. Narayan, U. Bhat. (2015). *An Introduction to Queueing Theory. Modeling and Analysis in Applications*. Springer Science+Business Media New York 2015. <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8421-1>
20. MathWorks. Simulink. <https://mathworks.com/simulink/>
21. Ronald A. Howard. (1960). *Dynamic Programming and Markov Processes*. New York : London: The Technology Press of The Massachusetts Institute of Technology and John Wiley & Sons, Inc. <https://gwern.net/doc/statistics/decision/1960-howard-dynamicprogrammingmarkovprocesses.pdf>
22. LINE Solver. Queueing Theory Algorithms <http://line-solver.sourceforge.net/>

Стаття надійшла до редакції 16.07.2025 і прийнята до друку після рецензування 28.10.2025

REFERENCES

1. Projekt Rady Jevropy «Posylennja bagatorivneвого vrjaduvannja ta miscevoi' demokratii' dlja pidtrymky vidnovlennja Ukrai'ny». <https://rm.coe.int/ukr-3926-project-leaflet/1680b6650d> (in Ukrainian).
2. Plan dij Rady Jevropy dlja Ukrai'ny na 2023-2026 roky «Stijkist', vidnovlennja ta vidbudova». <https://rm.coe.int/action-plan-ukraine-2023-2026-ukr/1680aa8282> (in Ukrainian).
3. *Gromady pid tyskom vijny: spivpracija, mizhnarodna pidtrymka ta finansova stijkist'. Dani monitoryngu vid Minrozvytku. Decentralizacija.* <https://decentralization.ua/news/20100>. (in Ukrainian).
4. Commission staff working document. Ukraine 2025 Report. <https://eu-ua.kmu.gov.ua/wp-content/uploads/EU-enlargement-.pdf>
5. *Dobre bagatorivneve vrjaduvannja, regional'na polityka, reforma PIM ta rozvytok ekosystemy DREAM.* Ministerstvo rozvytku gromad ta terytorij Ukrai'ny. <https://mindev.gov.ua/news/dobre-bahatorivneve-vriaduvannia-rehionalna-polityka-reforma-pim-ta-rozvytok-ekosystemy-dream>. (in Ukrainian).
6. Pro zatverdzhennja Statystychnoi' klasyfikacii' terytorial'nyh odync' Ukrai'ny (NUTS-UA). Nakaz Derzhavnoi' sluzhby statystyky Ukrai'ny № 216 (2025). Ukrai'na. <https://stat.gov.ua/uk/page-contents/nakaz-vid-01122025-no-216>. (in Ukrainian).
7. *Projekt mizhnarodnoi' tehnicnoi' dopomogy «Upravlinnja miscevyjmy finansamy dlja vidnovlennja ta vidbudovy gromad» (Fiscal Governance for Local Reconstruction and Recovery).* Decentralizacija. <https://decentralization.gov.ua/news/20167>. (in Ukrainian).
8. Porjadok formuvannja Koncepcii' integrovanogo rozvytku terytorii' terytorial'noi' gromady. Nakaz Ministerstva rozvytku gromad ta terytorij Ukrai'ny № 172. (2022). Ukrai'na. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1421-22#Text>. (in Ukrainian).

9. Artemenko, A. (2025). Modeljuvannja stanu klasternyh struktur za dopomogoj modelj systemy masovogo obslugovuvannja. *Ekonomika ta suspil'stvo*, 73. <https://doi.org/10.32782/2524-0072/2025-73-46>. (in Ukrainian).
10. Nekrasova, L.A. (2019). *Teoretyko-metodologichni zasady strateguvannja rozvytku vyrobnych pidpryjemstv v umovah decentralizacii*'. Schweinfurt: Time Realities Scientific Group UG (haftungsbeschränkt). <https://economics.net.ua/files/scientific-base/monogr/Nekrasova.pdf>. (in Ukrainian).
11. Gol'diner, D. I. (2024). *Metod ta modeli optymizacii' system masovogo obslugovuvannja z vykorystannjam tehnologii' priorityzacii' vhidnogo potoku zajavok : dys. ... d-ra filosofii*'. Harkiv: Harkiv. nac. un-t radioelektroniky. <https://openarchive.nure.ua/entities/publication/fb847475-7736-42a8-a0c9-d12d0cfaeb4>. (in Ukrainian).
12. Mass transit systems <https://www.studysmarter.co.uk/explanations/architecture/urban-studies-in-architecture/mass-transit-systems/>
13. Zhernovij, Ju. V. (2004). *Markovs'ki modeli masovogo obslugovuvannja: teksty lekcij*. L'viv: Vydavnychj centr LNU imeni Ivana Franka. (in Ukrainian).
14. Andrijejev, M. V. (2015). *Optymizacija stohastychnyh procesiv: kerovani markovs'ki ta napivmarkovs'ki modeli: navchal'nyj posibnyk*. Kyi'v: NNK «IPSA» NTUU «KPI». (in Ukrainian).
15. Taylor, H. M. (1966). Markovian sequential replacement processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, 36 (6), 1677-1694. <https://www.jstor.org/stable/2239109>
16. Blackwell, D. (1965). Discounted Dynamic Programming. *The Annals of Mathematical Statistics*, 36 (1), 226-235. <https://www.jstor.org/stable/2238089>
17. Maitra, A. (1968). Discounted Dynamic Programming on Compact Metric spaces. *Sankhyā. the Indian Journal of Statistics, Series A*. 30 (2), 211-216. <https://www.jstor.org/stable/25049530>
18. Feinberg, T. A., Kasyanov, P. O. & Zadoianchuk, N. V. (2012). Average Cost Markov Decision Processes with Weakly Continuous Transition Probabilities. *Journal Mathematics of Operation Research*, 37 (4), 591-607. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1202.4122>
19. Narayan, U. Bhat. (2015). *An Introduction to Queueing Theory. Modeling and Analysis in Applications*. Springer Science+Business Media New York 2015. <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8421-1>
20. MathWorks. Simulink. <https://mathworks.com/simulink/>
21. Ronald A. Howard. (1960). *Dynamic Programming and Markov Processes*. New York : London: The Technology Press of The Massachusetts Institute of Technology and John Wiley & Sons, Inc. <https://gwern.net/doc/statistics/decision/1960-howard-dynamicprogrammingmarkovprocesses.pdf>
22. LINE Solver. Queueing Theory Algorithms <http://line-solver.sourceforge.net/>

The article was received 16.07.2025 and was accepted after revision 28.10.2025

Шолохов Олексій Вікторович

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладних інформаційних технологій, Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Адреса робоча: вул. Богдана Гаврилишина, 24, 04116, м. Київ, Україна

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-8676-3724> **e-mail:** gyroalex@ukr.net

Дякон Дмитро Валерійович

аспірант, Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України

Адреса робоча: бульв. Чоколівський, 13, 0186, м. Київ, Україна

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-6826-7455> **e-mail:** dmitro.dyakon@gmail.com