

М. М. Шейко

Інститут надтвердих матеріалів ім. В. М. Бакуля
НАН України, м. Київ, Україна
max-kiiev@i.ua

До питання про природу осциляції сил, що реєструють у процесах переривчастого різання, про динамічне тарування, метод функції Гріна, прямі та обернені задачі коливальної системи

Наведено теоретичний аналіз одиничного циклу переривчастого різання, якій показує, що ланки системи верстат–приспосовування–інструмент–деталь, як коливальної системи, зазнають динамічних навантажень з відповідним динамічним коефіцієнтом. Але осциляція сил, які реєструють динамометром, не відображає безпосередньо зміну контактних сил деталь–різець (сил різання). У разі переривчастого різання в місці контакту виникають додаткові навантаження (добавки) до усталеної сили різання. Для визначення збурювальної сили різання за відомою залежністю коливання системи (обернена задача) застосовано метод функції Гріна та інтегральне рівняння Вольтерри 1-го роду. Ядро рівняння формується динамічним таруванням динамометра і в ньому “зашифта” вся інформація про коливальну систему. На прикладах продемонстровано ефективність методу, обчислено зазначену добавку і динамічний коефіцієнт безпосередньо сил різання як розв’язок інтегрального рівняння.

Ключові слова: переривчасте різання, коливальна система, динамічний коефіцієнт, збурювальна сила різання, динамічне тарування, метод функції Гріна.

Обробка матеріалів різанням досить часто відбувається в умовах переривчастого різання. Руйнування інструментів за таких умов може бути обумовлено механічним перевантаженням на вході і виході інструменту в заготовку, тепловими процесами під час нагрівання і охолодження, що періодично повторюються, а також спільним впливом механічних і теплових процесів. У роботі розглянуто лише динамічні механічні навантаження на різець та їхнє співвідношення з навантаженням ланок системи верстат–приспосовування–інструмент–деталь (ВПІД), зокрема пружних елементів динамометра, що має фіксувати осциляцію сил різання.

Відповідь на питання, поставлені у роботі, не є очевидною. Навіть якщо обмежитися розглядом лише одиничного циклу переривчастого різання [1], осциляція “сил різання”, що реєструють динамометром, може не мати нічого спільного із силами різання.

Одиничний цикл складається з етапів: врізання, переміщення різального клину в об’ємі заготовки (зняття стружки), виходу з контакту, переміщення ріжучого клину без контакту (холостого ходу). Якщо під час точіння в силу конструктивних особливостей заготовки, наприклад шпонкових пазів [2, 3], часовий інтервал врізання значно звужується, розглядають раптово прикла-

дене навантаження і відгук на нього в системі ВПД (або усіченій системі, такої як різець–резцеутримувач–супорт–станина). Відгук на раптово прикладену силу F у першому наближенні можна моделювати одномасовою системою (рис. 1).

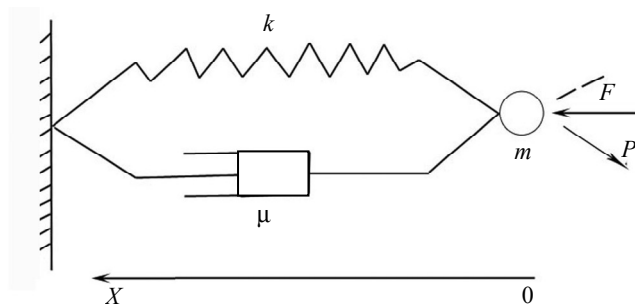


Рис. 1. Модель усіченої системи ВПД з ефективною масою m , коефіцієнтом жорсткості k і демпфуючою властивістю, що характеризується коефіцієнтом в'язкості μ .

Запишемо диференціальне рівняння

$$m\ddot{x} = F - kx - \mu\dot{x}, \quad (1)$$

де $x = x(t)$ – переміщення різця у часі t ; $kx(t)$ – пружна реакція деформованого елемента, що містить тензодатчик, з початковими умовами

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \frac{P}{m}, \quad (2)$$

де P – кількість руху (або імпульс), що передається системі у разі динамічного тарування динамометра падаючою кулькою. Рішення диференціального рівняння є наступним:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(\left(\frac{P}{m\omega} - \frac{F\beta}{k\omega} \right) \sin \omega t - \frac{F}{k} \cos \omega t \right) + \frac{F}{k}, \quad (3)$$

де $\beta = \frac{\mu}{2m}$ – коефіцієнт згасання; $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}}$ – циклічна частота власних

коливань системи. Зрозуміло, значення параметрів $P \neq 0$, $F = 0$ відповідає динамічному таруванню, а $P = 0$, $F \neq 0$ – процесу раптово прикладеній збурювальної сили.

Під час динамічного тарування часто допускають помилку – прирівнюють площу під першим гребенем графіка синусоїди $kx(t)$ імпульсу P . Графік сили треба інтегрувати за часом від нуля до нескінченності:

$$\int_0^{\infty} kx(t) dt \equiv \int_0^{\infty} e^{-\frac{\mu}{2m}t} \frac{P}{m\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}}} \sin \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}} t dt = P. \quad (4)$$

Формула (4) тривіально ілюструє другий закон Ньютона в імпульсній формі: імпульс сили, що діє на тіло, дорівнює зміні кількості руху тіла, тобто, у разі динамічного тарування треба інтегрувати графік сили за часом до моменту повного згасання коливань.

Відношення максимальної деформації пружного елемента в коливальному процесі до деформації за статичного навантаження (що дорівнює відношенню

відповідних пружних сил) називають динамічним коефіцієнтом K_d . За допомогою формули (3) отримаємо аналітичний вираз динамічного коефіцієнта:

$$K_d = 1 + e^{-\frac{\pi \mu}{\sqrt{4km - \mu^2}}} \quad (5)$$

У формулах (3) і (5) передбачена умова $4km > \mu^2$, що забезпечує “коливальний” розв’язок рівняння (3), більш цікавий для практики. З аналізу рівняння (5) випливає, що за $\mu^2 \rightarrow 4km$ динамічний коефіцієнт прямує до 1, тобто динамічне перевантаження не настає, за $\mu = 0$ одержуємо $K_d = 2$, що збігається з розв’язком найпростішої задачі про раптово прикладену силу, яка наведена в багатьох підручниках із сопромату.

Збурювальну силу F можна інтерпретувати як силу різання, але коефіцієнт K_d (5) не можна розглядати як міру сплеску цієї сили на етапі врізання. За визначенням збурювальна (або змушувальна) сила є змінною у часі силою, яка не залежить від стану механічної системи і яка викликає коливання цієї системи. У даному разі сила різання F (одна із компонентів P_z, P_y, P_x) дійсно є збурювальною. Вона є зовнішньою по відношенню до системи, наперед задана (як одна з умов задачі), має точку прикладення на різці в контакті з деталлю. Динамічний коефіцієнт є величиною, що порівнює сили деформації пружного елемента динамометра під час миттєвого та нескінченно повільного прикладенні сили F . Локація цих пружних сил досить віддалена від контакту деталей–різець і знаходиться усередині габаритів динамометра як ланки пружної системи [4], а між цією локацією та контактом розташовані аж ніяк не безмасові різцетримач, інтегрований в спеціальну плиту динамометра, та сам різець. Отже, показано, що осциляція сил, які реєструють динамометром, не відображає безпосередньо зміну контактних сил деталей–різець. Лише в усталеному режимі, у разі згасання осциляцій, реєстрована динамометром сила пружної деформації елемента з тензодатчиком чисельно дорівнює контактній силі F .

Зрозуміло, що під час переривчастого різання в контакті виникають деякі додаткові навантаження (добавки) до середньої сили F , про що свідчить більше зношування різця [2, 3]. Для того, щоб визначити цю добавку та обчислити справжній динамічний коефіцієнт запропоновано метод розв’язання цієї задачі. Досі розглядали пряму задачу: за відомою збурювальною, раптово прикладеною силою F визначали відгук – коливальний процес механічної системи як розв’язок диференціального рівняння з початковими умовами. Для розв’язання оберненої задачі – визначення збурювальної сили за відомим графіком коливання системи – було використано метод функції Гріна, що застосовують у багатьох задачах математичної фізики [5].

Фізичний зміст функції Гріна – це відгук системи на пробний, одиничний вплив на неї. У даному разі за одиничний вплив приймаємо передачу системі одиниці імпульсу P у разі динамічного тарювання. Тоді загальним впливом буде вплив збурювальної сили з графіком $F(t)$. Відгук на одиничний вплив (функція Гріна) – це осциляція, наприклад, пружної сили $kx_p(t)/P$, що викликана передачею імпульсу 1 н·с в момент часу ξ ; її загальний вираз

$$G(t, \xi) = e(t - \xi) \cdot \frac{kx_p(t - \xi)}{P},$$

де $e(\cdot)$ – одинична функція Хевісайда. Осциляція пружної сили $kx_F(t)$, як відгук на збурювальну силу $F(t)$ за загальною схемою застосування функції Гріна, дорівнює

$$kx_F(t) = \int_0^{\infty} G(t, \xi) \cdot F(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} e(t-\xi) \frac{kx_P(t-\xi)}{P} F(\xi) d\xi.$$

Після заміни змінної $z = t - \xi$ отримуємо

$$kx_F(t) = \int_{-\infty}^t e(z) \frac{kx_P(z)}{P} F(t-z) dz \equiv \int_0^t \frac{kx_P(z)}{P} F(t-z) dz.$$

Далі переходимо до відносних значень пружних сил і поділимо останнє рівняння на сталу складову F збурювальної сили:

$$\frac{kx_F(t)}{F} = \int_0^t \left(\frac{kx_P(z)}{P} \right) \cdot \left(\frac{F(t-z)}{F} \right) dz.$$

Ліва частина рівняння, яку позначимо $J_F(t)$, це є відгук на вплив збурювальної сили $F(t)$ і є величиною безрозмірною. Перший співмножник під інтегралом, позначимо його як $J_P(t)$, є відгуком на передачу імпульсу P , що припадає на 1 н·с. Це є базою для побудови функції Гріна, її розмірність – с^{-1} . Другий співмножник під інтегралом – нормована збурювальна сила, безрозмірна величина, яку надалі будемо позначати як $F(t)$.

Остаточна, робоча формула має наступний вигляд:

$$J_F(t) = \int_0^t J_P(\xi) F(t-\xi) d\xi, \quad (6)$$

за її допомогою обчислюють відгук (графік коливання системи) за будь-якого виду збурювальної сили. Наприклад, столоподібний графік $F(t)$ відповідає раптово прикладеному навантаженню, а потім також раптово знятому, тобто етапу врізання, робочому ходу, виходу з контакту та холостому ходу. Нижче виконано такі обчислення, передбачені (експериментально чи теоретично) відомою функцією $J_P(\xi)$. Зауважимо, метод функції Гріна і формула (6), зокрема, коректні для лінійних систем, що має місце у даному разі за малих деформацій.

Модифікація рівняння (6) до виду

$$J_F(t) = \int_0^t J_P(t-\xi) F(\xi) d\xi \quad (7)$$

приводить по суті, до інтегрального рівняння Вольтерри 1-го роду для шуканої збурювальної сили F (істинного динамічного коефіцієнта сили різання). У ядрі $J_P(t-\xi)$ “зашиита” вся інформація про коливальну систему. Рівняння (7) розв’язували методом Крилова–Боголюбова [5] із усередненням значень ядра та приведенням до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Побудовано відповідний алгоритм та створено програмне забезпечення за аналогією з [6].

Все викладене вище проілюстровано не на тривіальній одномасовій моделі з єдиною затухаючою гармонікою з “правильним” графіком, а на двомасовій (рис. 2), більш реалістичній, з нетривіальним графіком коливань та можливістю порівнювати результати тензометрування за різної локації тензодатчиків (про практику розташування датчиків див. [7]).

Відповідно до схеми рис. 2 отримано систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F - k(x - y); \\ m\ddot{y} = k(x - y) - ky - \mu\dot{y}. \end{cases} \quad (8)$$

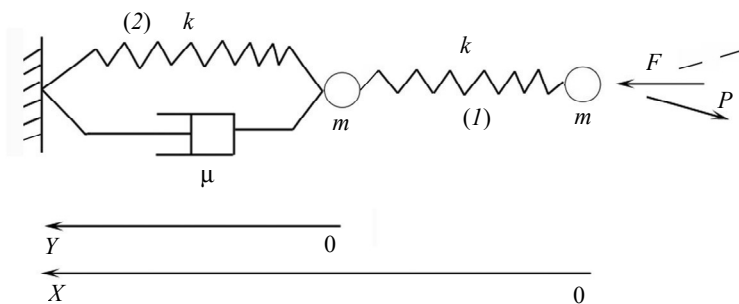


Рис. 2. Модель усіченої системи ВПД із розосередженням маси на двох ділянках: абсолютно пружній ділянці з коефіцієнтом жорсткості k (1) і ділянці з тією ж жорсткістю та демпфуючою властивістю, що характеризується коефіцієнтом в'язкості μ (2).

За $F = 0$ та початкових умов

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = P/m, y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0 \quad (9)$$

розв'язок системи диференціальних рівнянь моделює динамічне тарування динамометра, а за початкових умов

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0 \quad (10)$$

збудження коливань за навантаження $F \neq 0$. Розв'язок системи отримано аналітично і представляє собою суму чотирьох згасаючих гармонік.

Для більш-менш реалістичної ілюстрації вихідні параметри задано так, щоб частоти коливань пружних елементів обох ділянок були одного порядку із частотою власних коливань динамометра УДМ-600 – 1350 Гц [8]. За значень $m = 0,3$ кг, $k = 2 \cdot 10^7$ Н·м⁻¹, $\mu = 1000$ Н·с·м⁻¹ отримано вираз (у матричній формі) осциляції пружних сил деформації першої ділянки як відгук на передачу системі кількості руху P :

$$k(x - y)_P(t) = Pk10^{-5} \left(e^{-1201t} \begin{pmatrix} 18,2 \\ -4,57 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sin 13058t \\ \cos 13058t \end{pmatrix} + e^{-466t} \begin{pmatrix} 18,2 \\ 4,57 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sin 5069t \\ \cos 5060t \end{pmatrix} \right) \quad (11)$$

або після нормування – вираз бази функції Гріна

$$J_P^{(1)}(t) = \frac{k(x - y)_P(t)}{P},$$

графік 1 якої приведено на рис. 3, де по осі абсцис відкладено час у секундах, а по осі ординат – значення функцій у зворотних секундах, як і далі на рис. 4–7. Аналогічний за структурою вираз для другої ділянки (див. рис. 3, 2), а також відгуки на збуджувальну силу F : $J_F^{(1)}(t)$ і $J_F^{(2)}(t)$ для першої та другої ділянок відповідно (див. рис. 4).

Згортки (6) кожної із баз функцій Гріна (див. рис. 3) зі збуджувальною силою F (пряма задача) дають відгуки, що точно збігаються з графіками осциляцій (див. рис. 4), отриманими розв'язком системи диференціальних рівнянь (8) з початковими умовами (10). Це наочно ілюструє ефективність застосування апарату функцій Гріна. Ще один, згаданий вище, приклад застосування функції Гріна – це згортка зі збуджувальною силою зі столоподібним графіком. Результат представлено на рис. 5. Цікаво, що амплітуда осциляції пружних сил на виході з контакту є такою ж значною, як і на вході в контакт. Експериментально коливання різця під час точіння на виході з контакту зафіксовано в [1].

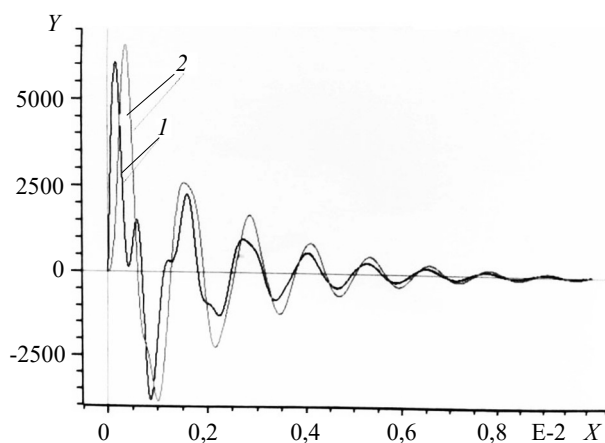


Рис. 3. Осциляція пружних сил деформації першої (1) і другої (2) ділянок коливальної системи як відгуки на одиницю переданого системі імпульсу P (база функції Гріна).

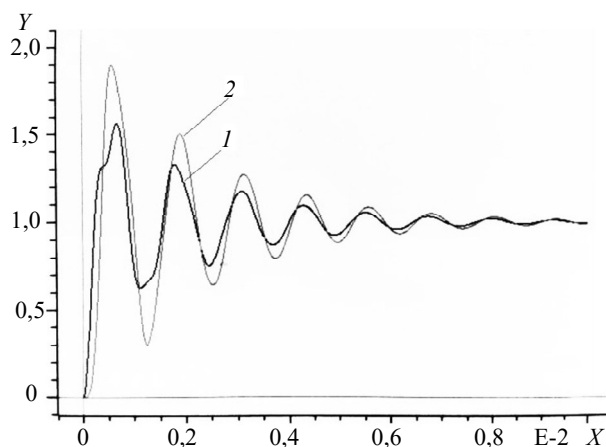


Рис. 4. Осциляція пружних сил деформації першої (1) і другої (2) ділянок коливальної системи як відгук на раптово прикладену збурювальну силу F .

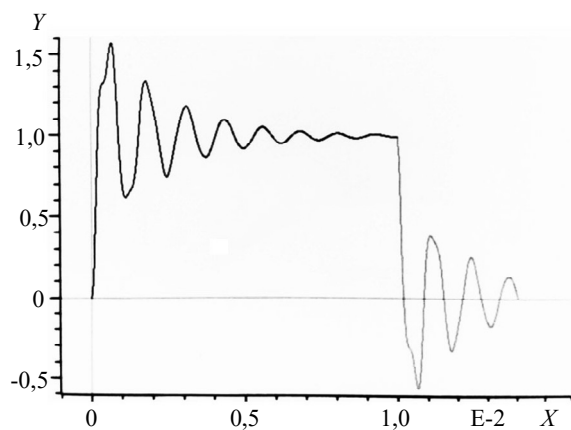


Рис. 5. Осциляція пружних сил деформації першої ділянки коливальної системи як відгук на раптово прикладену (у момент $t = 0$) і раптово зняту ($t = 0,01$ с) збурювальну силу F .

Як ілюстрацію розв'язання оберненої задачі визначимо збудовальну силу F (у загальному випадку змінну за часом) за відомим законом (або графіком) коливань пружних сил деформації будь-якої ділянки коливальної системи. Наприклад, на рис. 6 наведено наступні графіки:

- наперед відомої, еталонної збудовальної сили $F(t) = 1 + 0,6e^{-2 \cdot 10^{11} t^4}$ з характерним сплеском в момент прикладення ($K_d = 1,6$);
- осциляції пружних сил деформації першої ділянки ($K_d = 2,47$) як відгуку на цю збудовальну силу,
- збудовальної сили, відновленої за відгуком та функцією Гріна, як розв'язок інтегрального рівняння (7).

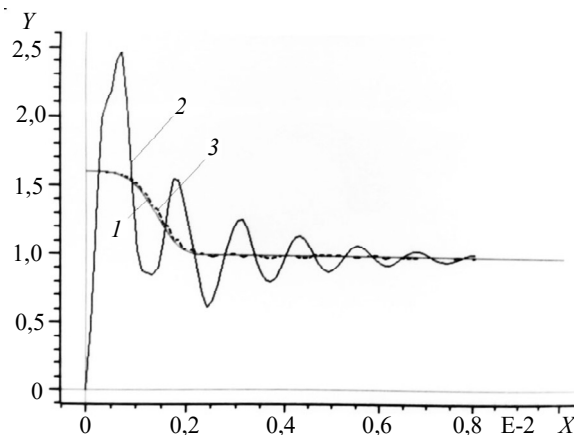


Рис. 6. Еталонна збудовальна сила з характерним сплеском у момент прикладення (1), осциляція пружних сил деформації першої ділянки коливальної системи як відгук на збудовальну силу (2) та збудовальна сила, розрахована (відновлена) за відгуком і функцією Гріна (3).

Видно, що розв'язок практично збігається з еталоном; метод зведення до СЛАР вже за значення числа розбиття $n = 80$ дав похибку не більше 2–4 %. Також суттєвим є те, що обчислена сила є контактною та її можна інтерпретувати як силу різання. Це дозволяє стверджувати про реальний динамічний коефіцієнт, що дорівнює 1,6. Саме у цьому разі (на відміну від збудовальної сили зі столоподібним графіком) у контакті, ймовірно, відбуваються швидкоплинні фізичні процеси [2, 3].

Якщо збудовальна сила з характерним максимумом в момент свого прикладення призводить до більш високих динамічних навантажень системи, ніж раптово прикладена столоподібна сила (див. рис. 7, 1 і 2), то сила, що плавно зростає напевно має зменшити динамічний коефіцієнт. Справді, розрахований відгук на збудовальну силу $F(t) = 1 - e^{-9,78 \cdot 10^5 t^2}$, що плавно зростає, практично не викликає динамічного навантаження (див. рис. 7, 3). Але ж інтервал зростання сили зовсім не розтягнутий: за $t = 0,002$ с ця сила вже виходить на 98 % свого плато. Під час різання зі швидкістю 1,88 м/с це відповідає довжині забірної частини лише 3,8 мм. За допомогою цього методу можна позбутися динамічних перевантажень.

Останнє зауваження стосується локації тензодатчиків. На всіх графіках видно, що осциляції, які реєструють на першій та другій ділянках хоча не дуже, але відрізняються. Динамічний коефіцієнт, зафіксований на першій ділянці, дорівнює 1,57, а на другій — 1,90 (див. рис. 4). Дивно, але друга, дем-

пфована ділянка зазнає більших навантажень за того самого значення сили збурення F . Це ще раз доводить відносність сил, що реєструють, до умов експерименту.

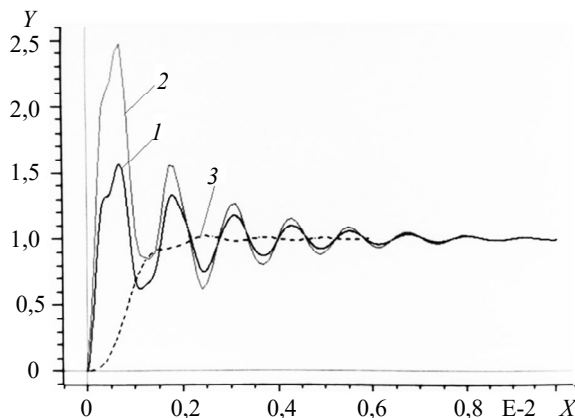


Рис. 7. Осциляція пружних сил деформації першої ділянки коливальної системи як відгук на раптово прикладену збурювальну силу $F = \text{const}$ (1), на $F = \text{var}$ з характерним сплеском у момент прикладення (2), на $F = \text{var}$ зі швидко, але плавно зростаючим значенням (3).

ВИСНОВКИ

Теоретичний аналіз одиничного циклу переривчастого різання показав, що ланки системи верстат–приспосовування–інструмент–деталь як коливальної системи зазнають динамічних навантажень з відповідним динамічним коефіцієнтом, але осциляція сил, що реєструють за допомогою динамометра, не відображає безпосередньо зміну контактних сил деталь–різець, тобто сил різання. Лише в усталеному стані, у разі згасання осциляцій, зареєстрована динамометром сила пружної деформації елемента з тензодатчиком чисельно дорівнює контактній.

У разі переривчастого різання в контакті виникають добавки до усталеної сили (про це свідчить підвищене зношування різця). Якщо пряма задача – визначення коливального процесу як відгуку на відому збурювальну силу – є відносно тривіальною (розв’язок диференціальних рівнянь з відповідними початковими умовами), то для розв’язання оберненої задачі – визначення збурювальної сили, а саме сили різання в контакті деталь–різець, за відомим графіком коливання системи – було застосовано метод функції Гріна, що приводить до інтегрального рівняння Вольтерри 1-го роду. У ядрі інтегрального рівняння, пов’язаного з динамічним тарюванням динамометра, “заши-та” вся інформація про коливальну систему. Продемонстровано ефективність методу, можливість обчислення зазначеної добавки і динамічного коефіцієнта безпосередньо сил різання як розв’язку означеного рівняння.

У разі динамічного тарювання динамометра часто допускають помилку – площу під першим гребенем графіка (за часом) синусоїди сили пружної деформації елемента з тензодатчиком прирівнюють імпульсу, що передає системі падаюча кулька. Інтегрувати графік сили за часом треба до моменту повного згасання коливань.

Відповідним вибором коефіцієнта згасання або графіка збурювальної сили можна досягти відгуку практично без динамічного перевантаження ланок коливальної системи.

ФІНАНСУВАННЯ

Дану роботу не фінансували із зовнішніх джерел.

M. M. Sheiko

Bakul Institute for Supersolid Materials ,

National Academy of Science of Ukraine, Kiev, Ukraine

On the question of the nature of force oscillations recorded in intermittent cutting processes, of dynamic calibration, of the green's function method, of direct and inverse problems of an oscillatory system

A theoretical analysis of a single cycle of intermittent cutting is presented, showing that the links of the machine–fixture–tool–part system as an oscillatory system experience dynamic loads with a corresponding dynamic coefficient. But the oscillation of forces recorded by the dynamometer does not directly reflect the change in the contact forces “part–cutter”, that is, the cutting forces. However, with intermittent cutting, there are additions to the steady-state force in the contact. To determine the disturbing cutting force from a known system oscillation graph (inverse problem), the author used the Green function method and the Volterra integral equation of the 1 kind. The core of the equation is formed by the dynamic calibration of the dynamometer, and all information about the oscillatory system is “sewn” into the core. The effectiveness of the method is demonstrated by examples, the specified additive and the dynamic coefficient of the directly cutting forces are calculated as a solution to the integral equation.

Keywords: intermittent cutting, oscillatory system, dynamic coefficient, cutting disturbance force, dynamic calibration, Green's function method.

1. Солодков, В. А., Карчаидзе А. А. Особенности единичного цикла процесса прерывистого резания. Волгоград, 2010. С. 4–10.
2. Манохін А.С., Клименко С.Ан., Мельничук Ю.О., Li X., Teng F., Zhang J., Sun T. Моделювання переривчастого різання загартованої сталі PCBN-інструментом. *Інженерія поверхні та реновація виробів. Матеріали 23-ї Міжнар. наук.-техн. конф. 20–22 червня 2023 р., Київ–Тернопіль*. С. 55–58.
3. Li X., Teng F., Manokhin A.S., Zhang J., Klymenko S.A., Tao Sun, Klymenko S.An., Melniychuk Y.O., Pasichny O.O. Experimental study and finite-element modeling of the intermittent cutting of steel AISI 52100 with a PcBN containing tool. *J. Superhard Mater.* Vol. 45, no. 3. P. 226–234.
4. Бутаков Б.И., Зубехина А.В. Жесткость системы станок–инструмент–деталь при обкатывании деталей роликами. *Вісник аграрної науки Причорномор'я*. 2008. Вип. 4. С. 210–223.
5. Мышкис А.Д. Математика для вузов. Специальные курсы. М.: Наука, 1971. 632 с.
6. Шейко М.Н. Построение стохастической теории процесса алмазной правки абразивных кругов: дис. ... докт. техн. наук: 05.03.01. Киев, 2012. 524 с.
7. Мар'ян А.П., Пірда П.І. Розробка та дослідження автоматизованої системи для контролю точності механічної обробки металу: кваліфікаційна робота магістра за спеціальністю 151 “Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології”. Тернопіль: ТНТУ, 2023. 72 с.
8. Гусейнов Р.В. Динамометрическая аппаратура для измерения составляющих сил резания при обработке осевым инструментом. *Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки*. 2018. Т. 45, № 1. С. 22–29.

Надійшла до редакції 29.04.25

Після доопрацювання 29.04.25

Прийнята до опублікування 20.05.25